

УДК 519.74

Д.А.Зайцев, А.И.Слепцов

УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИИ И ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВРЕМЕННЫХ СЕТЕЙ ПЕТРИ

ВВЕДЕНИЕ

Сеть Петри является формальной моделью поведения параллельных систем с асинхронным взаимодействием. Простота и высокий уровень абстракции модели обусловили широкий спектр ее приложений, включающий проектирование распределенных средств обработки информации, исследование производственных и организационных систем и другие области. Основные положения теории сетей Петри представлены в монографиях [1,2] и обзорных статьях [3,4].

Решение задач, связанных с моделированием поведения систем во времени, потребовало расширения первоначального определения сети, в котором понятие времени отсутствовало. Свойства временных сетей Петри исследованы в работах [5–8]. Приложениям временных и других расширенных классов сетей Петри для проектирования управляющих систем гибких автоматизированных производств посвящена монография [9]. При построении сетевых моделей систем и процессов в [1,2,9] использована композиция сетей с внешними (входными и выходными) позициями. В [10] изучались вопросы управляемости для таких сетей.

Целью настоящей работы является построение алгебраических методов эквивалентных преобразований временных сетей Петри с внешними входными и выходными позициями на основе формального математического описания поведения и передаточной функции сети.

Так как известны различные варианты определения временных сетей Петри, остановимся на обсуждении особенностей исследуемого класса временных сетей. Как и в [5,6] рассматриваются временные

задержки, связанные с переходами сети. Такой способ введения времени удобен для моделирования систем: переходы сети представляют действия исходной системы, а позиции соответствуют условиям (ресурсам), необходимым для запуска действий. Как и в [7] предполагается, что время сети дискретно и временные задержки представлены положительными целыми числами. Действительно, в большинстве случаев может быть установлен минимальный интервал времени (такт), являющийся единицей измерения времени в моделируемой системе.

В большинстве работ по временным сетям [5,7,9] предполагается, что активный переход заблокирован на все время его срабатывания. Таким образом, каждый из переходов сети оказывается неявно связанным с некоторым ресурсом, имеющимся в единственном экземпляре. При построении моделей реальных систем требовалось дублирование переходов, что приводило к громоздкости сети. Для сокращения размерности моделей в работе [8] введены сети, в которых разрешены повторные запуски активных переходов.

В настоящей работе введен и исследован более общий класс временных сетей Петри, допускающих не только повторный запуск активных переходов в последующие моменты времени, но и одновременный кратный запуск переходов. Таким образом переход можно рассматривать как некоторое абстрактное (виртуальное) действие. Запуск конкретных действий в моделируемой системе определяется объемом имеющихся ресурсов, отображаемым разметкой входных позиций соответствующего перехода. Используя аналогию с системами массового обслуживания, можно сказать, что каждый из переходов сети представляет собой многоканальное устройство с неограниченным числом каналов. Фактические ограничения на число каналов задает разметка позиций. Для математического описания кратных запусков переходов также, как и для описания кратных дуг в [1], используются элементы теории комплектов.

На Рис. I сопоставлены изобразительные возможности традиционных временных сетей (с одноканальными переходами) и временных сетей с многоканальными переходами: k одноканальных переходов сети, изображенной на Рис. Ia, моделируются одним многоканальным переходом сети, представленной на Рис. Ib. Ограничение на число каналов задает разметка позиции p_3 .

Для сетей Петри были исследованы поведенческие типы эквивалентности, связанные с множествами достижимых маркировок и свободными языками сетей [1,2]. В [1] показано, что соответствующие общие алгоритмические проблемы являются неразрешимыми. Как специфическую форму эквивалентных преобразований можно рассматривать методы редукции сетей [3,4]. В этом случае эквивалентными считаются сети с одинаковым набором поведенческих свойств (ограниченность, живость, безопасность).

В настоящей работе для сетей Петри вводится функциональный тип эквивалентности. Временная сеть Петри с внешними входными и выходными позициями рассматривается как "черный ящик", преобразующий входной поток маркеров в некоторый выходной поток. Это отображение потоков маркеров и названо передаточной функцией сети. Сети с одинаковыми передаточными функциями считаются (функционально) эквивалентными.

При исследовании поведения и эквивалентности временных сетей Петри с многоканальными переходами применен алгебраический подход, представленный в работе [11] для невременных сетей. В отличие от [11], уравнение состояний, описывающее поведение временной сети, содержит дополнительные операции временной задержки, деления нацело и операции многозначной логики. Алгебра с названными операциями имеет специфические законы, которым соответствуют структурные преобразования сетей.

Формальное определение класса временных сетей с многоканаль-

ными переходами дано в разделе 1. Для реализации поставленной в работе цели в разделе 2 строится уравнение состояний, являющееся полным математическим описанием динамики временной сети Петри с многоканальными переходами. Далее в разделах 3 и 4 уравнение состояний используется для определения передаточной функции и исследования функциональной эквивалентности сетей с внешними входными и выходными позициями. В разделе 5 предлагается метод эквивалентных преобразований сетей, основанный на алгебраических преобразованиях уравнений, задающих передаточную функцию.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Временная сеть Петри – это двудольный ориентированный нагруженный граф, на котором вводится понятие динамического процесса.

Определение 1.

Граф временной сети – это пятерка $G=(P,T,F,W,D)$, где $P=\{p\}$ – конечное множество позиций; $T=\{t\}$ – конечное множество переходов. Позиции и переходы являются вершинами графа. Отношение смежности вершин $F\subseteq(P\times T)\cup(T\times P)$ задает дуги графа. Отображение $W:F\rightarrow\{1,2,\dots\}$ определяет кратности дуг, а отображение $D:T\rightarrow\{1,2,\dots\}$ задает времена срабатывания переходов.

Кратности дуг $(p,t)\in F$, $(t,p)\in F$ и времена срабатывания переходов $t\in T$ будем обозначать $w_{p,t}$, $w_{t,p}$, d_t соответственно. Введем также вспомогательные обозначения:

- $\cdot p = \{t \mid (t,p)\in F\}$ – множество входных переходов позиции p ;
- $p^\bullet = \{t \mid (p,t)\in F\}$ – множество выходных переходов позиции p ;
- $\cdot t = \{p \mid (p,t)\in F\}$ – множество входных позиций перехода t ;
- $t^\bullet = \{p \mid (t,p)\in F\}$ – множество выходных позиций перехода t .

Определение 2.

Маркировкой сети будем называть отображение $M:P\rightarrow\{0,1,\dots\}$, задающее распределение динамических элементов – маркеров – по

позициям сети.

Время, в котором функционирует сеть, дискретно. Оно разбито на **такты**; для нумерации тактов используется целочисленная переменная $\tau=0,1,2,\dots$. Маркировка сети в такте τ представляется множеством чисел $M(\tau)=\{\mu_p(\tau) | p \in P\}$. Граф G вместе с начальной маркировкой $M_0=M(0)$ образуют временную сеть Петри. В общем случае необходимо также указать и начальные состояния переходов. Поэтому формальное определение временной сети будет дано в следующем разделе работы после выбора параметров, полностью описывающих состояние переходов и позиций в текущем такте времени.

Процесс функционирования сети состоит в изменении ее маркировки в результате срабатываний переходов. Правила срабатывания переходов вводятся в определении 3. Отметим, что на протяжении произвольного такта времени маркировка всех позиций сети неизменна; модификация маркировки происходит только в моменты смены тактов. События, происходящие в момент смены тактов, будем условно относить к последующему такту времени.

Определение 3.

Правила срабатывания переходов временной сети:

I. Переход $t \in T$ называется возбужденным, если маркировка всех его входных позиций $p \in \bullet t$ не меньше кратности $w_{p,t}$ соответствующих дуг.

II. Срабатывание перехода $t \in T$ состоит в его запуске и последующем завершении через d_t тактов времени. При запуске перехода t из всех его входных позиций $p \in \bullet t$ извлекается по $w_{p,t}$ маркеров. При завершении перехода t в каждую из его выходных позиций $p \in t \bullet$ поступает по $w_{t,p}$ маркеров.

III. Запуски и завершения переходов происходят в моменты смены тактов следующим образом: вначале завершаются все ранее запущенные переходы, для которых истекло время срабатывания; затем

определяются условия возбуждения и выполняется запуск возбужденных переходов.

IV. Имеется заранее неограниченное число экземпляров (каналов) каждого из переходов. Запускается произвольный комплект возбужденных переходов, не приводящий к появлению отрицательных маркировок.

Простые по формулировке правила срабатывания переходов требуют некоторых дополнительных пояснений. Запуск произвольного комплекта возбужденных переходов подразумевает не только некоторое множество переходов, но также и определенное число экземпляров каждого из возбужденных переходов. В этой связи целесообразно в дальнейшем определить условие возбуждения не как двоичную величину [12], а как целое неотрицательное число, равное количеству возбужденных экземпляров перехода. В соответствии с введенными правилами срабатывания переходов, количество запускаемых экземпляров перехода (кратность запуска) не превышает количества возбужденных экземпляров (кратность возбуждения). Процесс функционирования сети может быть представлен временной диаграммой запуска переходов [7].

Отметим, что в общем случае временная сеть Петри является недетерминированной системой. Это обусловлено двумя причинами. Во-первых, в правилах срабатывания переходов не требуется немедленный запуск возбужденных переходов. Поэтому, переход может находиться в возбужденном состоянии неограниченное время и запуститься в произвольном такте, если условие его возбуждения не будет снято.

Определение 4.

Сеть, в которой в любом такте времени $t=0,1,2,\dots$ запускается максимальный комплект возбужденных переходов, называется **синхронной**.

Заметим, что максимальный комплект не обязательно является

наибольшим. Максимальность понимается в том смысле, что запуск еще по крайней мере одного возбужденного экземпляра любого из переходов приводит к появлению отрицательных маркировок. Факт существования нескольких различных максимальных комплектов запускаемых переходов связан с конфликтами в сетях. Наличие конфликтов является второй из причин недетерминированности поведения сети.

Наиболее простым для исследования является подкласс временных сетей, в которых отсутствуют конфликты. Однако, как показано в [10], бесконфликтность является сложным поведенческим свойством, определение которого даже для базовых сетей Петри вызывает серьезные затруднения. Достаточным условием отсутствия конфликтов [10] является структурная бесконфликтность сети.

Определение 5.

Структурно–бесконфликтной будем называть сеть, каждая позиция которой имеет не более одного выходного перехода: $\forall p \in P: |p^*| \leq 1$.

Отметим, что структурно–бесконфликтная синхронная временная сеть является детерминированной системой, так как комплект запускаемых переходов всегда совпадает с комплектом возбужденных переходов.

Далее в разделах работы 2 и 3 рассматриваются временные сети общего вида; основные результаты разделов 4 и 5 получены для подкласса структурно–бесконфликтных синхронных сетей.

2. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЙ ВРЕМЕННОЙ СЕТИ

В базовых сетях Петри срабатывание перехода происходит мгновенно. Поэтому текущее состояние сети однозначно определяется ее маркировкой. Состояние временной сети включает в себя состояние позиций (маркировку) и состояние переходов. Большинство исследований временных сетей абстрагируется от состояния переходов и

рассматривает лишь маркировку сети как наиболее существенную часть ее состояния. Так, в работе Кретьена [7] используются уравнения, связывающие маркировку сети с векторами счета запусков и завершений переходов. При этом вектора счета оцениваются приближенно. Для исследования поведения временной сети необходимы величины, полностью определяющие ее состояние.

В некоторых работах по временным сетям, например [5,6], отмечалось, что в качестве текущего состояния перехода можно использовать время, оставшееся до его завершения. Однако неизвестны полные формальные описания динамики сети, использующие эти величины.

В настоящей работе предлагается в качестве текущего состояния перехода в произвольный момент времени τ использовать предисторию его запусков на интервале $[\tau-d_i+1, \tau]$. Целочисленность значений времени позволяет ограничиться рассмотрением предистории запусков каждого из переходов, состоящей из d_i величин.

Определение 6.

Состоянием временной сети в такте τ будем называть пару $S(\tau) = (S^P(\tau), S^T(\tau))$, где $S^P(\tau)$ задает состояние позиций, а $S^T(\tau)$ – состояние переходов; при этом

$$\begin{aligned} S^P(\tau) &= M(\tau) = \{\mu_p(\tau) | p \in P\}, \\ S^T(\tau) &= U(\tau) = \{u_t(\tau - \theta) | t \in T, \theta = \overline{0, d_t - 1}\}, \end{aligned} \quad (I)$$

где величина $u_t(\vartheta)$ равна количеству экземпляров (каналов) перехода t , запущенных в такте ϑ . Предистория запусков переходов $U(\tau)$ может храниться в матрице размерности $n \times k$, где $n = |T|$, $k = \max(d_t)$. При этом для каждого конкретного перехода t используется d_t значений матрицы.

Определение 7.

Временная сеть Петри N – это пара $N = (G, S_0)$, где G – граф сети, а $S_0 = S(0)$ – ее начальное состояние.

В предыдущем разделе рассматривалась только начальная

маркировка M_0 и предполагалось, что все переходы сети в начальный момент времени пассивны $U_0=0$. В общем случае необходимо рассматривать ненулевые значения U_0 . Начальное состояние переходов U_0 , а также состояния $U(\tau)$ до момента времени $\tau=k$ используют в соответствии с определением (I) отрицательные значения времени в предистории запусков переходов. Поэтому, на абстрактном уровне будем рассматривать переходы, запущенные "до начального момента времени". Такое допущение позволяет сделать описание сети более регулярным и не противоречит естественному пониманию динамики процессов, так как выбор нулевого момента времени зачастую является весьма условным.

Для построения уравнения состояний введем ряд вспомогательных величин: $v_t(\tau)$ – количество экземпляров перехода t , возбужденных в такте τ ; $\mu'_p(\tau)$ – промежуточная маркировка позиции p в момент смены такта $\tau-1$ тактом τ , получающаяся при завершении ранее запущенных переходов.

Проиллюстрируем введенные понятия на примере. На рис.2 изображена временная сеть Петри N_1 , имеющая 6 позиций и 4 перехода. Для переходов сети указаны времена их срабатывания. На дугах подписана их кратность. Непомеченные дуги имеют кратность равную единице. Числа, записанные внутри позиций, задают начальную маркировку сети. Переходы t_1 и t_3 активны в начальном состоянии и поэтому имеют сплошную закраску. Подробная информация об их начальном состоянии приведена в нижней части рисунка.

На рис.3 представлена временная диаграмма процесса функционирования сети N_1 . Отметим, что рассматриваемый процесс является одним из множества допустимых процессов, удовлетворяющих правилам срабатывания переходов (определение 3). Для каждого из переходов на вертикальной оси диаграммы отображено максимальное число каналов, которые могут быть одновременно активными на представлен-

ном отрезке времени. В нижней части рисунка приведены таблицы, отображающие динамику изменения величин μ'_p , v_t , u_t , μ_p во времени. Рассматриваемый процесс является циклическим, так как $S(10)=S(0)$. Заметим, что поведение сети асинхронно. Уже в такте $\tau=1$ запускаемый комплект переходов $(1,1,0,1)$ не является максимальным. В этом такте максимальными будут комплекты $(1,1,3,1)$, $(1,0,5,0)$, $(0,1,2,2)$, первые два из которых являются также и наибольшими. Запускаемый комплект переходов является максимальным только в тактах $\tau=3$ и $\tau=13$.

В ряде случаев целесообразно рассматривать внешнее воздействие на сеть в форме потоков маркеров, поступающих извне в позиции сети. Маркеры, поступившие извне в позицию p в такте $\tau-1$ и участвующие в возбуждении переходов в такте τ , обозначим α_p^τ .

Утверждение I. Динамика временной сети Петри N в соответствии с правилами срабатывания переходов (определение 3) полностью описывается системой уравнений и неравенств (2).

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu'_p(\tau) = \mu_p(\tau-1) + \sum_{t \in \bullet p} w_{t,p} \cdot u_t(\tau-d_t) + \alpha_p^\tau, \quad (2.1) \\ \mu_p(\tau) = \mu'_p(\tau) - \sum_{t \in p} w_{p,t} \cdot u_t(\tau), \quad (2.2) \\ \mu_p(\tau) \geq 0, \quad 0 \leq u_t(\tau) \leq v_t(\tau), \quad (2.3) \quad (2) \\ v_t(\tau) = \bigwedge_{q \in \bullet t} \mu'_q(\tau) / w_{q,t}, \quad p \in P, \quad t \in T, \quad (2.4) \\ S(0) = S_0, \quad \tau = 1, 2, \dots, \end{array} \right.$$

где операция конъюнкции $\&$ интерпретируется как в многозначной логике [13]: $x \& y = \min(x, y)$, а операция деления является делением нацело (целая часть частного). Систему (2) в соответствии с [12] будем далее называть уравнением состояний временной сети.

Для доказательства утверждения покажем, что система (2) соответствует правилам срабатывания перехода, введенным в

определении 3. Действительно, величина $v_t(\tau)$ в уравнении (2.4) является ненулевой лишь в том случае, если маркировка всех входных позиций перехода не меньше кратности соответствующих дуг: $\mu'_q(\tau)/w_{q,t} \geq 1 \Leftrightarrow \mu'_q(\tau) \geq w_{q,t}$, что соответствует правилу I. Уравнения (2.1) и (2.2) описывают запуски и завершения переходов по правилу II. Использование промежуточных маркировок $\mu'_q(\tau)$, которые участвуют в условиях возбуждения (2.4), позволяет определить действия в момент смены тактов в соответствии с правилом III. Набор неравенств (2.3) обеспечивает выполнение правила IV.

Следует отметить, что исходное определение динамики сети не указывает на способ выбора запускаемых переходов из комплекта возбужденных. Это соответствует различным способам разрешения неравенств системы (2) и определяется из конкретной постановки задачи для моделируемой системы. Для синхронных сетей неравенства должны разрешаться таким образом, что для любого $u_t(\tau) < v_t(\tau)$ решение $u_t(\tau)+1$ приводит к появлению отрицательных маркировок.

Специального рассмотрения требует случай пустого множества входных позиций $\cdot t$ некоторого перехода $t \in T$. Для такого перехода значением конъюнкции уравнения 4 будем считать символ ω , соответствующий неограниченному значению кратности возбуждения. В неравенствах (2.3) будет выбрано произвольное конечное значение $u_t(\tau)$. Для синхронных сетей исключим из рассмотрения переходы с пустым множеством входных позиций (истоки), так как максимальность комплекта запускаемых переходов требует запуск неограниченного числа экземпляров перехода.

Отметим, что для структурно-бесконфликтных синхронных сетей система (2) существенно упрощается. Так как $u_t(\tau) = v_t(\tau)$, то из системы удаляются неравенства и поведение сети полностью описывается только системой рекуррентных уравнений.

3. ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ СЕТЕЙ

Далее в работе будут рассматриваться временные сети Петри с внешними входными и выходными позициями. В [1,9] сети с внешними входными и выходными позициями использованы для построения моделей сложных многокомпонентных систем. Композиция таких сетей выполняется путем совмещения (наложения) их внешних позиций. В [10] для таких сетей решается задача управляемости – перемещения сети в заданное конечное состояние. В настоящей работе исследуется функциональная зависимость потока маркеров, поступающего в выходные позиции сети от потока, подаваемого во входные позиции. Сеть рассматривается как динамическая система, преобразующая входной поток маркеров в некоторый выходной поток.

Определение 8.

Сеть с входными и выходными позициями – это тройка $Z=(N, X, Y)$, где N – временная сеть Петри, $X \subseteq P$ – множество входных позиций сети, а $Y \subseteq P$ – множество выходных позиций. Причем $X \cap Y = \emptyset$ и, кроме того, входные позиции не имеют входящих дуг, а выходные – исходящих: $\forall x \in X: \cdot x = \emptyset, \forall u \in Y: u \cdot = \emptyset$. Позиции множества $R = P \setminus (X \cup Y)$ будем называть внутренними.

Будем предполагать, что внешнее воздействие на сеть направлено только в ее входные позиции: $\forall p \notin X, \forall \tau > 0: \alpha_p^\tau = 0$.

Определение 9.

Входной последовательностью α сети Z будем называть множество целых неотрицательных чисел $\alpha = \{\alpha_x^\tau | x \in X, \tau = 1, 2, \dots\}$. **Выходной последовательностью** ϕ сети Z будем называть последовательность маркеров $\phi = \{\phi_y^\tau | y \in Y, \tau = 1, 2, \dots\}$, поступающих в ее выходные позиции в результате функционирования сети N .

Заметим, что выходная последовательность ϕ определяется входной последовательностью α и уравнением состояний сети (2). Однако, ввиду недетерминированности процесса функционирования

сети, определенной последовательности α соответствует множество $\Phi = \{\phi\}$ выходных последовательностей.

Определение I0.

Отображение f_z множества входных последовательностей $\{\alpha\}$ сети Z во множество множеств ее выходных последовательностей $\{\Phi\}$ будем называть **передаточной функцией сети** и обозначать $\Phi = f_z(\alpha)$.

На Рис. 4 сеть с входными и выходными позициями Z схематически изображена как "черный ящик", преобразующий входную последовательность маркеров α во множество допустимых выходных последовательностей Φ . Для взаимодействия с внешним миром используются только подмножества X и Y позиций сети. Поведение сети для внешнего наблюдателя полностью характеризуется ее передаточной функцией f_z .

При сравнении передаточных функций будем рассматривать только сопоставимые сети, имеющие равномошные множества входных, а также равномошные множества выходных позиций. Кроме того, будем предполагать, что задано определенное взаимно-однозначное соответствие внешних позиций сетей, например, при помощи некоторой их нумерации.

Определение II.

Сети Z и Z' будем называть **функционально эквивалентными** и обозначать $Z \equiv Z'$, если для любой входной последовательности α множества их выходных последовательностей совпадают: $f_z(\alpha) = f_{z'}(\alpha)$.

Заметим, что введенное определение функциональной эквивалентности является наиболее сильным. Исследование слабых типов функциональной эквивалентности по отношению к определенному виду входных последовательностей, а также по отношению к конкретным моментам времени выходит за рамки настоящей работы.

Использование введенного сильного определения функциональной эквивалентности позволяет выполнить замену произвольной сети Z эквивалентной ей сетью Z' в произвольном контексте внешнего воз-

действия. Кроме того, выполняя декомпозицию некоторой временной сети N на подсети с входными и выходными позициями и замену некоторых подсетей эквивалентными, можно осуществить преобразование исходной сети, полностью сохраняющее характеристики не участвующих в преобразовании элементов. Общие вопросы декомпозиции сетей Петри на подсети с входными и выходными позициями не рассматриваются в настоящей работе.

Передаточная функция f_z сети Z неявно задается ее уравнением состояний (2). При этом маркировка выходных позиций может не рассматриваться, так как она не участвует в возбуждении переходов сети. Соответствующие уравнения необходимо заменить соотношениями, определяющими выходную последовательность сети:

$$\Phi_y^\tau = \sum_{t \in \bullet y} w_{t,y} \cdot u_t(\tau - d_t), \quad y \in Y.$$

Эквивалентным преобразованиям уравнения состояний соответствуют структурные преобразования сети, сохраняющие ее передаточную функцию. Такой подход можно использовать для формирования множества преобразований сетей простейшего вида. Целью преобразований является сокращение размерности сети.

Например, для сети, изображенной на Рис. 5а, имеем $X = \{p_1, p_2\}$, $Y = \{p_3, p_4\}$. Передаточная функция описывается следующей системой уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu'_1(\tau) = \mu_1(\tau-1) + \alpha_1^\tau \\ \mu_1(\tau) = \mu'_1(\tau) - w_1 \cdot u_1(\tau) - w_1 \cdot u_2(\tau), \mu_1(\tau) \geq 0 \\ \mu'_2(\tau) = \mu_2(\tau-1) + \alpha_2^\tau \\ \mu_2(\tau) = \mu'_2(\tau) - w_2 \cdot u_1(\tau) - w_2 \cdot u_2(\tau), \mu_2(\tau) \geq 0 \\ \Phi_3^\tau = w_3 \cdot u_1(\tau-d) + w_3 \cdot u_2(\tau-d) \\ \Phi_4^\tau = w_4 \cdot u_1(\tau-d) + w_4 \cdot u_2(\tau-d) \\ v_1(\tau) = v_2(\tau) = (\mu'_1(\tau)/w_1) \& (\mu'_2(\tau)/w_2) \\ 0 \leq u_1(\tau) \leq v_1(\tau), 0 \leq u_2(\tau) \leq v_2(\tau) \end{array} \right. \quad (3)$$

Обозначим $u(\tau) = u_1(\tau) + u_2(\tau)$ и $v(\tau) = v_1(\tau) + v_2(\tau)$. Необходимым и достаточным условием неотрицательности $\mu_1(\tau)$ и $\mu_2(\tau)$ является выполнение неравенства $0 \leq u(\tau) \leq v(\tau)$. Поэтому система (3) может быть заменена эквивалентной системой (4):

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1'(\tau) = \mu_1(\tau-1) + \alpha_1^\tau \\ \mu_1(\tau) = \mu_1'(\tau) - w_1 \cdot u(\tau) , \mu_1(\tau) \geq 0 \\ \mu_2'(\tau) = \mu_2(\tau-1) + \alpha_2^\tau \\ \mu_2(\tau) = \mu_2'(\tau) - w_2 \cdot u(\tau) , \mu_2(\tau) \geq 0 \\ \phi_3^\tau = w_3 \cdot u(\tau-d) \\ \phi_4^\tau = w_4 \cdot u(\tau-d) \\ v(\tau) = (\mu_1'(\tau)/w_1) \& (\mu_2'(\tau)/w_2) \\ 0 \leq u(\tau) \leq v(\tau) \end{array} \right. \quad (4)$$

Системе (4) соответствует сеть, изображенная на Рис.5б. Следовательно, сети, изображенные на Рис.5а и Рис.5б, являются функционально эквивалентными. Преобразование позволило удалить 4 дуги и 1 переход.

Для временных сетей общего вида применение описанного подхода связано со значительными трудностями, так как уравнение состояний описывает передаточную функцию сети неявно и кроме переменных α и ϕ , характеризующих функциональную зависимость, содержит ряд вспомогательных величин. Основные результаты, связанные с эквивалентными преобразованиями, будут получены для подкласса структурно-бесконфликтных синхронных сетей.

4. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ СТРУКТУРНО-БЕСКОНФЛИКТНОЙ СЕТИ

Далее в работе будут рассматриваться синхронные структурно-бесконфликтные временные сети Петри с входными и выходными позициями. Заметим, что поведение таких сетей детерминировано и определенной входной последовательности α соответствует единственная выходная последовательность $\phi = f_z(\alpha)$.

Введем величину $\beta_p(\tau)$ (или β_p^τ), равную суммарному количеству маркеров, поступивших в позицию p к моменту времени τ . Использование этой величины позволит далее выразить передаточную функцию сети (теорема I) из уравнения состояний (2) путем исключения переменных μ , μ' , u , характеризующих состояние внутренних элементов сети. Отметим, что в соответствии с определением последовательность β_p^τ , $\tau=1,2,\dots$ для $\forall p \in P$ является неубывающей. В соответствии с уравнением состояний (2), значения величин β_p^τ для входных, внутренних и выходных позиций сети задаются соотношениями (5), (6), (7) соответственно:

$$\beta_x^\tau = \sum_{\theta=1}^{\tau} \alpha_x^\theta, x \in X. \quad (5)$$

$$\beta_r^\tau = \sum_{\theta=1}^{\tau} \sum_{t \in \bullet r} w_{t,r} \cdot u_t(\theta - d_t), r \in R. \quad (6)$$

$$\beta_y^\tau = \sum_{\theta=1}^{\tau} \phi_y^\theta = \sum_{\theta=1}^{\tau} \sum_{t \in \bullet y} w_{t,y} \cdot u_t(\theta - d_t), y \in Y. \quad (7)$$

Введем обозначения последовательностей β_p^τ для входных и выходных позиций сети:

$$\beta^X = \{\beta_x^\tau | x \in X, \tau=1,2,\dots\}, \beta^Y = \{\beta_y^\tau | y \in Y, \tau=1,2,\dots\}. \quad (8)$$

Заметим, что β^X и β^Y являются последовательностями частичных сумм последовательностей α и ϕ соответственно. Поэтому передаточную функцию сети Z можно рассматривать также, как отображение последовательностей β^X в последовательности β^Y : $\beta^Y = g_Z(\beta^X)$. Теорема I определяет систему уравнений, задающую передаточную функцию сети относительно частичных сумм входных и выходных последовательностей. Утверждение 2 устанавливает, что использование передаточной функции g_Z инвариантно относительно исходного определения функциональной эквивалентности.

Утверждение 2. $Z=Z'$ тогда и только тогда, когда для любой неубывающей последовательности β^X имеет место $g_Z(\beta^X) = g_{Z'}(\beta^X)$.

Доказательством утверждения служит тот факт, что между последовательностями α и β^X , а также последовательностями ϕ и β^Y имеется взаимно-однозначное соответствие. Прямое отображение задается соотношениями (5) и (7), а обратное отображение определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}\alpha_x^1 &= \beta_x^1; \quad \alpha_x^\tau = \beta_x^\tau - \beta_x^{\tau-1}, \quad x \in X, \quad \tau=2,3,\dots \\ \phi_y^1 &= \beta_y^1; \quad \phi_y^\tau = \beta_y^\tau - \beta_y^{\tau-1}, \quad y \in Y, \quad \tau=2,3,\dots\end{aligned}$$

Теорема I. Передаточная функция структурно-бесконфликтной синхронной временной сети Петри Z описывается системой уравнений

$$\beta_p(\tau) = \mu_p^0 + \sum_{t \in \bullet p} w_{t,p} \cdot \bigotimes_{q \in \bullet t} (\beta_q(\tau-d_t)/w_{q,t}) + \delta_p(\tau), \quad p \in RU Y, \quad (9)$$

где величина $\delta_p(\tau)$ равна суммарному притоку маркеров в позицию p к такту τ от переходов, активных в начальном состоянии. Заметим, что $\delta_p(\tau) = \text{const}$ при $\tau > k$. Если переходы пассивны в начальном состоянии, то $\delta_p(\tau) = 0$, в противном случае

$$\delta_p(\tau) = \sum_{t \in \bullet p} w_{t,p} \cdot \sum_{\theta=-d_t+1}^{\min(\tau-d_t, 0)} u_t^\theta. \quad (10)$$

Доказательство. Построим уравнение состояний сети Z :

$$\left\{ \begin{aligned} \mu'_x(\tau) &= \mu_x(\tau-1) + \alpha_x^\tau, \quad x \in X \\ \mu'_p(\tau) &= \mu_p(\tau-1) + \sum_{t \in \bullet p} w_{t,p} \cdot u_t(\tau-d_t), \quad p \in RU Y \\ u_t(\tau) &= \bigotimes_{q \in \bullet t} (\mu'_q(\tau)/w_{q,t}), \quad t \in T \\ \mu_p(\tau) &= \mu'_p(\tau) - w_{p,s} \cdot u_s(\tau), \quad p \in XUR, \quad p^\bullet = \{s\} \\ \mu_y(\tau) &= \mu'_y(\tau), \quad y \in Y. \end{aligned} \right. \quad (11)$$

Выразим из (11) величину β_p^τ для внутренних и выходных позиций сети в соответствии с (6), (7)

$$\beta_p(\tau) = \mu_p^0 + \sum_{\theta=1}^{\tau} \sum_{t \in \bullet p} w_{t,p} \cdot u_t(\theta-d_t), \quad p \in RU Y. \quad (12)$$

Так как $w_{t,p}$ не зависит от τ , изменим в (12) порядок следования индексов суммирования и затем выделим интервал времени $[1, d_t]$, на

котором завершаются все экземпляры перехода t , активные в начальном состоянии:

$$\begin{aligned}
\beta_p(\tau) &= \mu_p^o + \sum_{t \in \cdot p} w_{t,p} \cdot \sum_{\theta=1}^{d_t} u_t(\theta-d_t) + \sum_{t \in \cdot p} w_{t,p} \cdot \sum_{\theta=d_t+1}^{\tau} u_t(\theta-d_t) = \\
&= \mu_p^o + \sum_{t \in \cdot p} w_{t,p} \cdot \sum_{\theta=-d_t+1}^{\min(0, \tau-d_t)} u_t + \sum_{t \in \cdot p} w_{t,p} \cdot \sum_{\theta=d_t+1}^{\tau} u_t(\theta-d_t) = \\
&= \mu_p^o + \sum_{t \in \cdot p} w_{t,p} \cdot \sum_{\theta=d_t+1}^{\tau} u_t(\theta-d_t) + \delta_p(\tau) . \tag{13}
\end{aligned}$$

Для доказательства теоремы необходимо выразить сумму величин $u_t(\theta-d_t)$ по индексу θ в (13) через величины $\beta_p(\tau)$ входных позиций перехода t . Значение указанной суммы в тактах $\tau < d_t+1$ будем считать равным нулю.

Из системы (II) выпишем уравнение, задающее маркировку произвольной входной или внутренней позиции q и подставим в него значение соответствующей $\mu'_q(\tau)$:

$$\mu_q(\tau) = \mu_q(\tau-1) + \sum_{t \in \cdot p} w_{t,p} \cdot u_t(\tau-d_t) - w_{q,s} \cdot u_s(\tau) , \quad p \in XUR. \tag{14}$$

Подставим в (14) последовательно значения маркировок в предыдущие такты времени вплоть до нулевого, тогда

$$\mu_q(\tau) = \beta_q(\tau) - w_{q,s} \cdot \sum_{\theta=1}^{\tau} u_s(\theta) .$$

И далее, используя соотношение $\mu'_q(\tau) = \mu_q(\tau) - w_{q,s} \cdot u_s(\tau)$, получим

$$\mu'_q(\tau) = \beta_q(\tau) - w_{q,s} \cdot \sum_{\theta=1}^{\tau-1} u_s(\theta) . \tag{15}$$

Из (15) определим значение μ' в такте $\tau-d_s$

$$\mu'_q(\tau-d_s) = \beta_q(\tau-d_s) - w_{q,s} \cdot \sum_{\theta=d_s+1}^{\tau-1} u_s(\theta-d_s) \tag{16}$$

Используем значение $\mu'_q(\tau-d_s)$, заданное (16), для вычисления $u_s(\tau-d_s)$ в соответствии с (II)

$$\begin{aligned}
u_s(\tau-d_s) &= \bigotimes_{q \in \cdot s} (\mu'_q(\tau-d_s)/w_{q,s}) = \\
&\bigotimes_{q \in \cdot s} ([\beta_q(\tau-d_s) - w_{q,s} \cdot \sum_{\theta=d_s+1}^{\tau-1} u_s(\theta-d_s)]/w_{q,s}) = \\
&\bigotimes_{q \in \cdot s} (\beta_q(\tau-d_s)/w_{q,s}) - \sum_{\theta=d_s+1}^{\tau-1} u_s(\theta-d_s)
\end{aligned} \tag{17}$$

Перенеся сумму в левую часть, получим

$$\sum_{\theta=d_s+1}^{\tau-1} u_s(\theta-d_s) = \bigotimes_{q \in \cdot s} (\beta_q(\tau-d_s)/w_{q,s}) \tag{18}$$

Подставив (18) в уравнение (13), получим уравнение (9).

Теорема доказана.

Таким образом, мы получили систему уравнений, описывающую передаточную функцию структурно-бесконфликтной сети. Отметим, что для сети, не содержащей циклов, передаточная функция может быть явно выражена через последовательности β^x ее входных позиций.

5. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СТРУКТУРНО-БЕСКОНФИКТНЫХ СЕТЕЙ

В настоящем разделе представлен алгебраический подход к эквивалентным преобразованиям временных сетей.

Введем, как в работе [14], алгебраические обозначения для операции временной задержки

$$u(\tau) \triangleright d = \begin{cases} 0, & \tau < d \\ u(\tau-d), & \tau \geq d. \end{cases}$$

Тогда система (9) может быть представлена для произвольного такта времени, индекс которого мы будем далее опускать, в форме (19).

$$\beta_p = \mu_p^o + \sum_{t \in \cdot p} w_{t,p} \cdot \bigotimes_{q \in \cdot t} ((\beta_q \triangleright d_t)/w_{q,t}), \quad p \in RU_Y. \tag{19}$$

В систему (19) входят величины $\beta_p \in B$, где B – множество неубывающих неотрицательных целочисленных функций времени, а также

положительные целые константы $w_{t,p}$, $w_{q,t}$, d_t . Для связи величин используются арифметические $\{+, \cdot, /\}$, логические $\{\&\}$ и временные $\{\triangleright\}$ операции. Определим основные законы алгебры $\mathscr{A}=(B, \Omega)$, имеющей носитель B и сигнатуру $\Omega= \{\cdot, \&, /, \triangleright, +\}$. Операции $\{+, \cdot, \&\}$ ассоциативны и коммутативны. Операция умножения дистрибутивна относительно сложения. Напомним, что конъюнкция интерпретируется как операция взятия минимума, а деление является делением нацело, поэтому, в общем случае $a/c+b/c \neq (a+b)/c$. Пусть $\beta_i \in B$, а $w_i, d_i = \text{const}$. Сформулируем специфические законы алгебры \mathscr{A} , возникающие в результате композиции арифметических, логических и временных операций:

$$\begin{aligned}
 1. (\beta \triangleright d_1) \triangleright d_2 &= \beta \triangleright (d_1 + d_2), & 2. (\beta_1 + \beta_2) \triangleright d &= (\beta_1 \triangleright d) + (\beta_2 \triangleright d), \\
 3. (\beta_1 + \beta_2) \triangleright d &= (\beta_1 \triangleright d) \cdot (\beta_2 \triangleright d), & 4. (\beta_1 \& \beta_2) \triangleright d &= (\beta_1 \triangleright d) \& (\beta_2 \triangleright d), \\
 5. w \cdot (\beta \triangleright d) &= (w \cdot \beta) \triangleright d, & 6. (\beta \triangleright d) / w &= (\beta / w) \triangleright d, \\
 7. \beta_1 + (\beta_2 \& \beta_3) &= (\beta_1 + \beta_2) \& (\beta_1 + \beta_3), & 8. \beta_1 \cdot (\beta_2 \& \beta_3) &= (\beta_1 \cdot \beta_2) \& (\beta_1 \cdot \beta_3) \\
 9. (\beta_1 \& \beta_2) / w &= (\beta_1 / w) \& (\beta_2 / w), & 10. (\beta_1 / w) \& \beta_2 &= (\beta_1 \& w \cdot \beta_2) / w, \\
 11. (\beta_1 / w) + \beta_2 &= (\beta_1 + w \cdot \beta_2) / w, & 12. (w \cdot \beta) / w &= \beta, \\
 13. \beta / (w_1 \cdot w_2) &= (\beta / w_1) / w_2. & & (20)
 \end{aligned}$$

Для доказательства законов (20) достаточно использовать определения операций множества Ω и отдельно рассмотреть временные интервалы для операции задержки [14], а также различные соотношения значений переменных для операции конъюнкции [13].

Пусть множество формул алгебры \mathscr{A} задает передаточную функцию сети Z . Тогда эквивалентным преобразованиям формул по законам (20) соответствуют структурные преобразования сетей, сохраняющие передаточную функцию.

Применение описанного подхода позволило для сетей, изображенных в левой части Рис.6а)–ж), построить эквивалентные сети меньшей размерности, изображенные в правой части рисунка. Рассмотрим подробнее процесс выполнения преобразований.

Преобразование а):

Исходная сеть содержит три позиции и два перехода.

Представим передаточную функцию сети в форме (I9):

$$\beta_3 = w_3 \cdot ((\beta_1 \triangleright d_1) / w_1),$$

$$\beta_2 = w_2 \cdot ((\beta_3 \triangleright d_2) / w_3).$$

Подставим первое уравнение во второе и применим последовательно законы (20) с номерами 5, I2, 6, I:

$$\begin{aligned} \beta_2 &= w_2 \cdot \frac{(w_3 \cdot ((\beta_1 \triangleright d_1) / w_1) \triangleright d_2)}{w_3} \stackrel{\langle 5 \rangle}{=} w_2 \cdot \frac{w_3 \cdot (((\beta_1 \triangleright d_1) / w_1) \triangleright d_2)}{w_3} \stackrel{\langle 12 \rangle}{=} \\ &= w_2 \cdot (((\beta_1 \triangleright d_1) / w_1) \triangleright d_2) \stackrel{\langle 6 \rangle}{=} w_2 \cdot (((\beta_1 \triangleright d_1) \triangleright d_2) / w_1) \stackrel{\langle 1 \rangle}{=} \\ &= w_3 \cdot ((\beta_1 \triangleright (d_1 + d_2)) / w_1). \end{aligned}$$

Полученное выражение имеет вид (I9); соответствующая ему сеть содержит две позиции и один переход.

Преобразование г):

$$\beta_3 = w_3 (\beta_4 \triangleright d_3), \quad \beta_4 = w_4 ((\beta_1 \triangleright d_1) / w_1) + w_5 ((\beta_2 \triangleright d_2) / w_2).$$

$$\begin{aligned} \beta_3 &= w_3 ([w_4 ((\beta_1 \triangleright d_1) / w_1) + w_5 ((\beta_2 \triangleright d_2) / w_2)] \triangleright d_3) = \\ &= w_3 w_4 ((\beta_1 \triangleright (d_1 + d_3)) / w_1) + w_3 w_5 ((\beta_2 \triangleright (d_2 + d_3)) / w_2). \end{aligned}$$

Преобразование ж):

$$\beta_2 = w_2 \cdot u, \quad \beta_3 = k + w_4 \cdot u, \quad \beta_4 = l + w_5 \cdot u,$$

$$u = \frac{\beta_1 \triangleright d}{w_1} \quad \& \quad \frac{\beta_3 \triangleright d}{w_3} \quad \& \quad \frac{\beta_4 \triangleright d}{w_5}.$$

При $\frac{k + w_4 \cdot i}{w_3} \leq \frac{l + w_5 \cdot i}{w_5}$ для $\forall i \geq 0$ имеем $\frac{\beta_3}{w_3} \leq \frac{\beta_4}{w_5}$, тогда

$$u = \frac{\beta_1 \triangleright d}{w_1} \quad \& \quad \frac{\beta_3 \triangleright d}{w_3}.$$

Таким образом, общий алгоритм эквивалентных преобразований сетей состоит в последовательном выполнении трех основных шагов:

Шаг I. Для заданной сети построить систему алгебраических уравнений вида (I9), задающих ее передаточную функцию.

Шаг 2. Выполнить эквивалентные преобразования системы уравнений с помощью законов (20) алгебры \mathcal{A} ;

Шаг 3. Привести полученную систему к виду (I9) и построить соответствующую ей сеть.

Так как выполненные операции сохраняют передаточную функцию, исходная и полученная сети являются функционально эквивалентными. Возможен также и другой способ выполнения эквивалентных преобразований путем непосредственного применения предварительно сформированных графических шаблонов, например, шаблонов, соответствующих эквивалентным сетям, изображенным на Рис.6.

Отметим, что описанный подход может быть также применен к синхронным временным сетям Петри общего вида путем выделения и последующего преобразования структурно-бесконфликтных подсетей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе введен класс временных сетей Петри с многоканальными переходами, обобщающий известные определения временных сетей Петри. Получено полное математическое описание процесса функционирования сети – уравнение состояний, являющееся основой для построения формальных методов исследования сетей.

В сетях с входными и выходными позициями введены понятия передаточной функции и функциональной эквивалентности. Показано, что передаточная функция сети неявно задается уравнением состояний, и эквивалентным преобразованиям уравнения соответствуют структурные преобразования сети, сохраняющие ее передаточную функцию.

Для подкласса структурно-бесконфликтных синхронных временных сетей получена система уравнений, задающая передаточную функцию в явном виде. Предложен метод эквивалентных преобразований сетей, базирующийся на применении законов специальной алгебры, содержащей арифметические, логические и временные операции.

Областью применения полученных результатов являются

формальные методы анализа, синтеза и минимизации сетевых моделей систем и процессов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

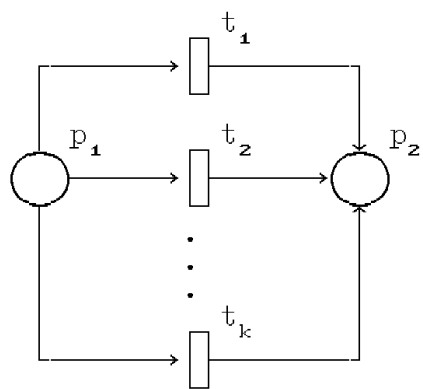
1. Питерсон Дж. Теория сетей Петри и моделирование систем.- М.: Мир, 1984.- 264с.
2. Котов В.Е. Сети Петри.- М.: Наука, 1984.- 160с.
3. Бандман О.Л. Поведенческие свойства сетей Петри (обзор французских работ) // Техническая кибернетика, 1987, №5, с.134-150.
4. Мурата Т. Сети Петри: свойства, анализ, приложения // ТИИЭР, т. 77, №4, 1989, с. 41-85.
5. Ramamorthy C.V., Ho G.S. Performance evaluation of asynchronous concurrent systems using Petri nets. IEEE Trans. on Soft. Eng., vol. 6, no. 5, 1980, pp. 440-449.
6. Hollyday M.A., Vernon M.K. A generalized timed Petri net model for performance analysis. Int. Workshop on Timed Petri Nets, Torino, Italy, July 1-3, 1985, pp. 181-190.
7. Chretienne P. Executions controlees des reseaux de Petri temporises. Techn. et Sci. Inform., vol. 3, no. 1, 1984, pp.23-31.
8. Zuberc W.H. Performance evaluation using extended timed Petri nets. Int. Workshop on Timed Petri Nets, Torino, Italy, July 1-3, 1985, pp. 272-278.
9. Слепцов А.И., Юрасов А.А. Автоматизация проектирования управляющих систем гибких автоматизированных производств.- К.: Техніка, 1986.- 160с.
10. Ichikawa A., Yokoyama K., Kurogi S. Reachability and control of discrete event systems represented by conflict-free Petri nets. Proc. of ISCAS 85, pp. 487-490.
- II. Слепцов А.И. Уравнения состояний и эквивалентные преобра-

зования нагруженных сетей Петри (алгебраический подход) // Формальные модели параллельных вычислений: Докл. и сообщ. Всесоюзной конференции.- Новосибирск, 1988.- с.151-158.

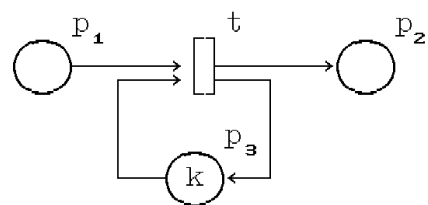
12. Murata T. State Equations, Controllability and Maximal Matchings of Petry Nets. IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-22, no. 3, 1977, pp. 412-414.

13. Волгин Л.И., Левин В.И. Непрерывная логика. Теория и применение.- Таллин, 1991.- 210с.

14. Рабинович З.Л. Элементарные операции в вычислительных машинах.- К.: Техніка, 1966.- 304с.



а)

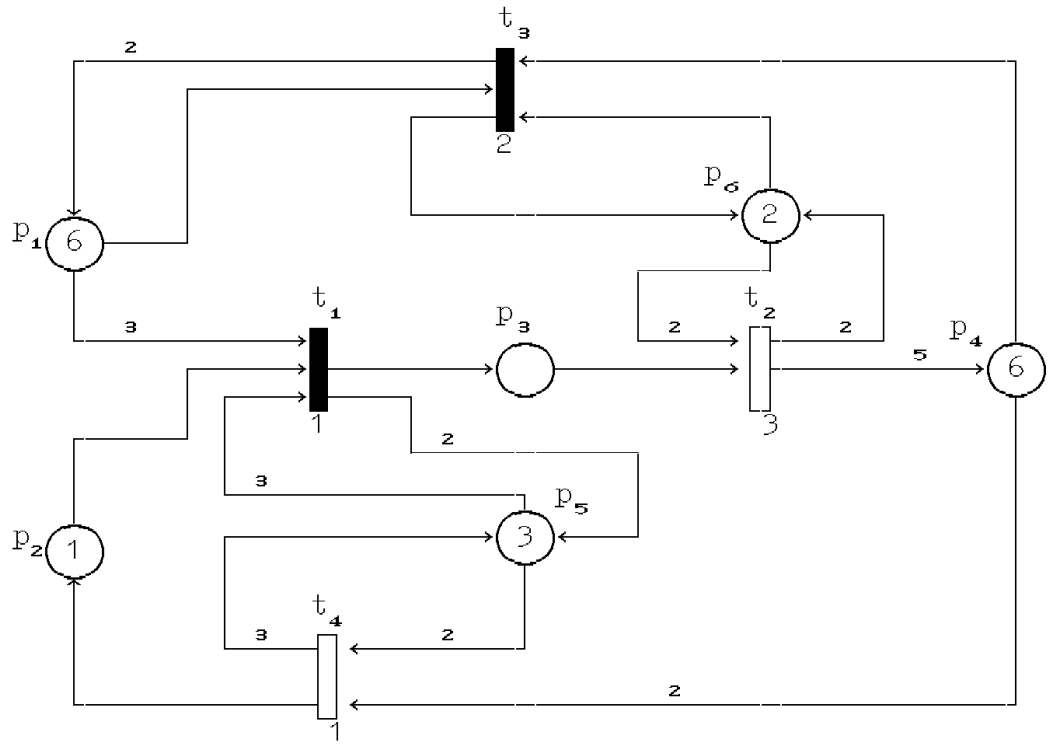


б)

Рис I. Изобразительные возможности временных сетей Петри:

а) сеть с одноканальными переходами;

б) сеть с многоканальным переходом.



$$u(t_1, 0) = 1, u(t_3, -1) = 3, u(t_3, 0) = 3.$$

Рис. 2. Временная сеть Петри N_1 .

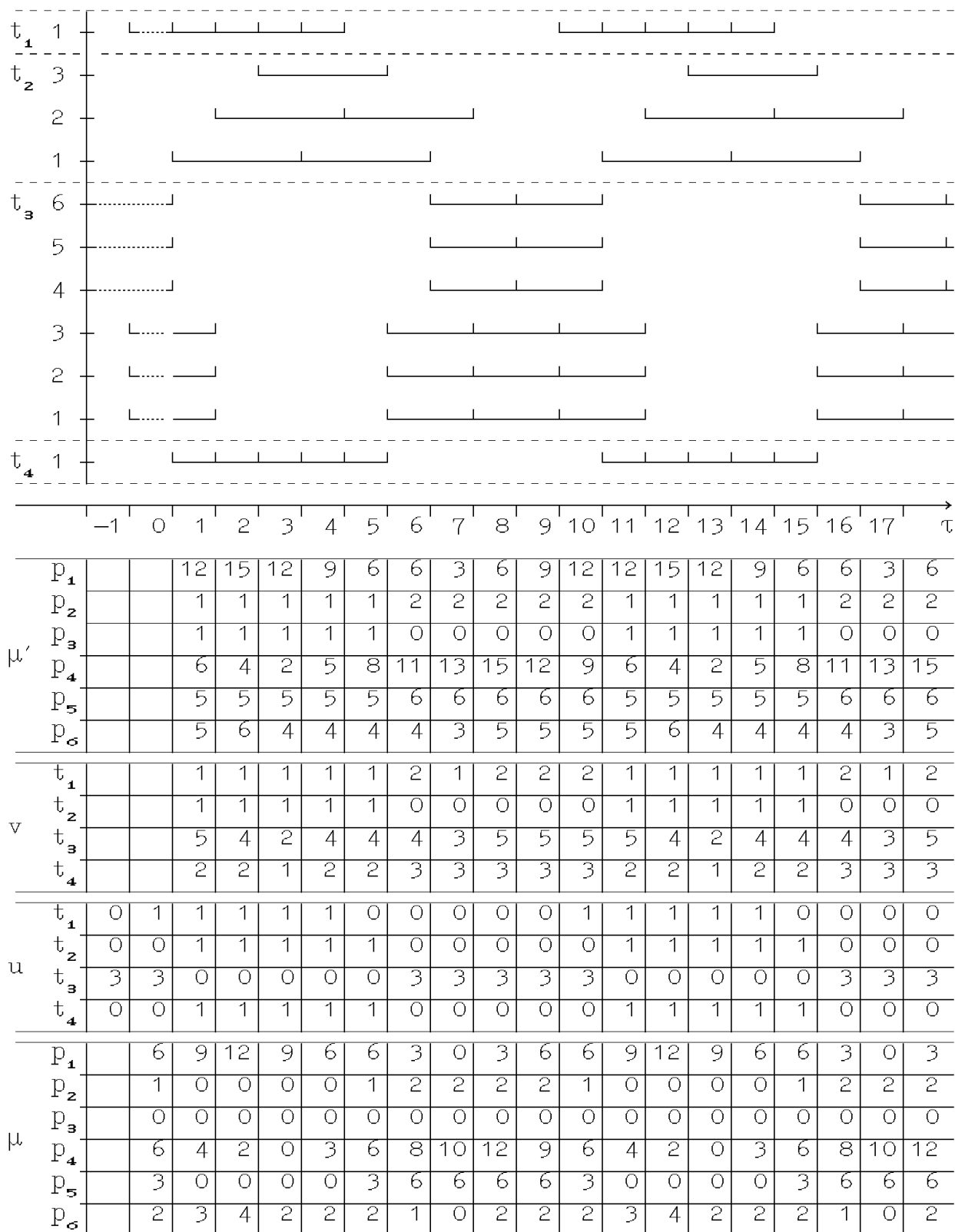


Рис. 3. Временная диаграмма динамики сети N_1 .

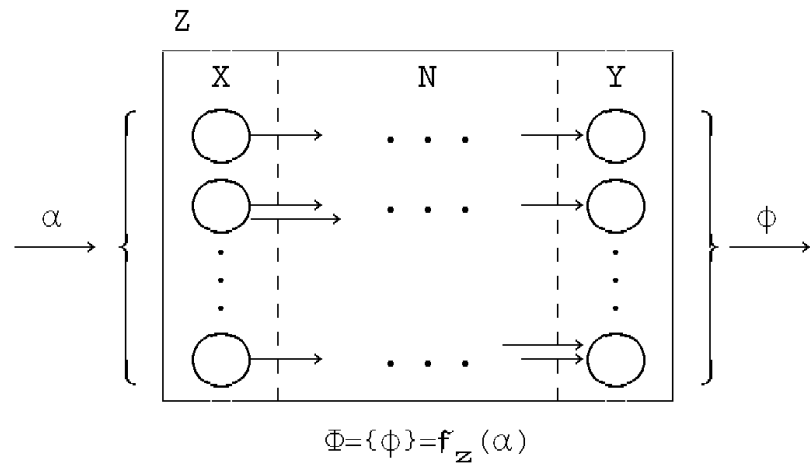


Рис. 4. Сеть с внешними входными и выходными позициями.

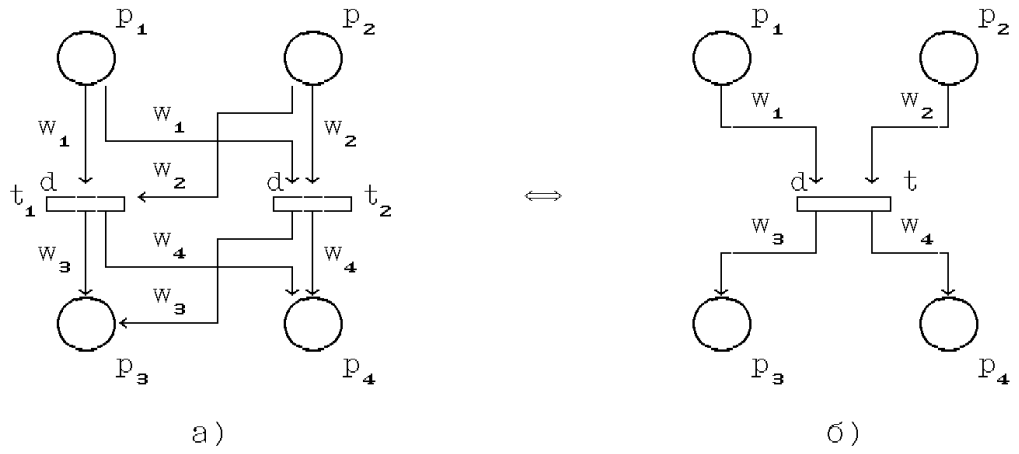


Рис. 5. Пример функционально эквивалентных сетей.

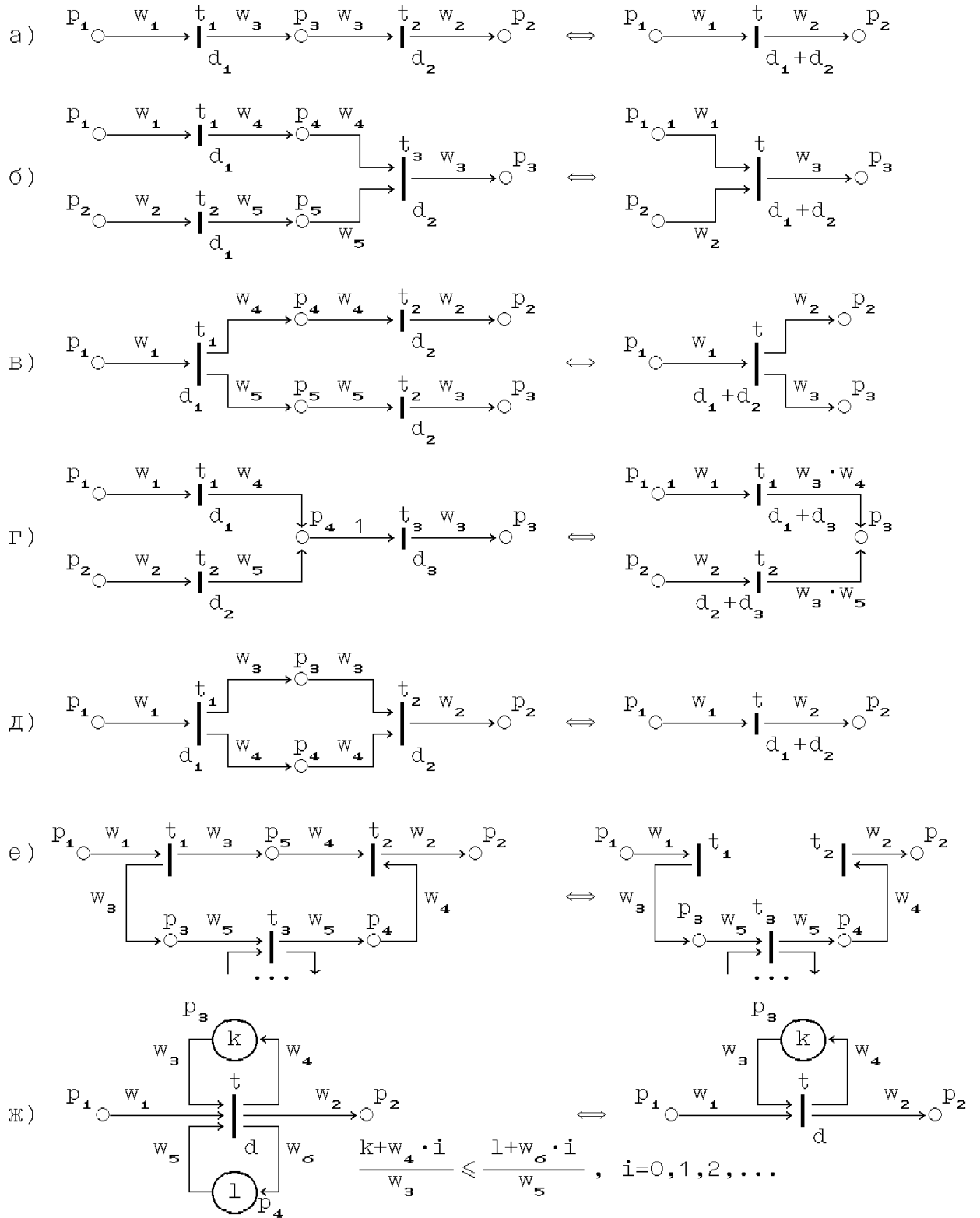


Рис 6. Эквивалентные преобразования временных сетей.