

## **Инварианты временных сетей Петри** временная сеть Петри, инвариант, частичный инвариант timed Petri net, invariant, partial invariant

### **Введение**

Временные сети Петри [1] являются одним из известных расширений базовых сетей Петри [2], используемым для моделирования систем и процессов, при анализе которых необходимо учитывать не только порядок выполнения действий, но также временные характеристики. Такие сети находят широкое применение при исследовании систем технологического и организационного управления [3,4]. Среди известных определений временных сетей наиболее популярным является определение, сопоставляющее временные задержки переходам сети, как элементам представляющим действия моделируемой системы [1,3,4,5]. Формальное описание поведения таких сетей с помощью уравнения состояний было получено в [1]. Следует также отметить, что в указанной работе исследованы сети, допускающие повторные запуски активных переходов. Таким образом, переходы сети являются многоканальными; при этом ограничения на количество каналов могут задаваться с помощью маркировки специальных позиций, либо указываться явно, как это будет выполнено в настоящей работе.

Одним из мощных средств исследования свойств базовых сетей Петри являются инварианты позиций и переходов [2,4]. Инварианты позволяют определить структурные свойства сети не зависящие от конкретной маркировки. Нахождение инвариантов сводится к решению систем линейных однородных уравнений в целых неотрицательных числах [2]; метод решения таких систем был предложен Тудиком в работе [6].

При исследовании временных сетей, как правило, использовались инварианты соответствующей базовой сети Петри [4]. Однако, в отличие от базовой сети, состояние которой полностью определяется её маркировкой, временная сеть в заданной маркировке может иметь различные состояния переходов. Состояние перехода пытались представлять временем, оставшимся до его завершения [5]. Однако такой способ связан со значительными трудностями в особенности для сетей, допускающих повторные запуски активных переходов. В работе [1] было предложено использовать в качестве состояния историю запусков перехода за период равный времени его срабатывания, что позволило получить полное формальное представление динамики сети в виде уравнения состояний. В настоящей работе уравнение состояний использовано для получения линейного фундаментального уравнения временной сети. Следует отметить, что фундаментальное уравнение временной сети существенно отличается от аналогичного уравнения базовой сети, полученного Муратой [7]. На основе фундаментального уравнения введены понятия полных и частичных инвариантов. При этом, так как состояние временной сети включает в себя не только маркировку,

но и характеристики переходов, определяются инварианты состояния и инварианты поведения, аналогичные инвариантам позиций и переходов базовой сети соответственно.

Также как и для базовой сети, нахождение инвариантов сводится к решению однородных линейных систем уравнений в целых неотрицательных числах, что позволяет применить для их решения метод Тудика [2,6]. Однако структура систем в большинстве случаев существенно отличается от аналогичных для базовых сетей. В работе исследованы также свойства инвариантных временных сетей Петри и выполнен анализ конкретных сетей, моделирующих производственные процессы.

### Основные понятия и определения

*Временной сетью Петри* будем называть пятёрку  $N = (P, T, F, W, D)$ , где  $P = \{p\}$  - конечное множество позиций,  $T = \{t\}$  - конечное множество переходов,  $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$  - конечное множество дуг,  $W : F \rightarrow \mathbf{N}$  - кратность дуг,  $D : T \rightarrow \mathbf{N}$  - времена срабатывания переходов;  $\mathbf{N}$  - множество натуральных чисел. Таким образом, временная сеть Петри представляет собой двудольный ориентированный граф, дополненный характеристиками дуг и вершин, представленными натуральными числами.

На Рис. 1 представлена временная сеть Петри  $N_1$ , моделирующая участок дискретного производства, которая была использована в работе [1] для иллюстрации уравнения состояний. На Рис. 2 представлена временная сеть Петри  $N_2$ , моделирующая транспортную подсистему автоматизированного производства [4].

Функционирование временной сети Петри будем рассматривать в дискретном времени, разбитом на равные промежутки, именуемые тактами; для нумерации тактов будем использовать целые числа  $\tau = 1, 2, \dots$ .

*Состояние временной сети* в такте  $\tau$  определим как  $S(\tau) = (S^P(\tau), S^T(\tau))$ , где  $S^P(\tau)$  - состояние позиций сети, а  $S^T(\tau)$  - состояние переходов.

Состояние позиций сети однозначно определяется её *маркировкой*  $S^P(\tau) = \{\mu_p(\tau) \mid \mu_p(\tau) \in \mathbf{N}^0, p \in P\}$ , задающей распределение фишек по позициям сети; где  $\mathbf{N}^0$  - множество целых неотрицательных чисел.

Состояние переходов также как в [1] будем представлять историей их запусков за период времени не превышающий максимальной длительности срабатывания перехода:  $S^T(\tau) = U(\tau) = \{u_t(\tau - \theta) \mid \theta = \overline{0, d_t - 1}, t \in T\}$ , где  $u_t(\tau)$  равно количеству каналов перехода  $t \in T$ , запущенных в такте  $\tau$ .

*Функционирование сети* представляет собой процесс изменения её маркировки в результате запусков и завершений переходов. При запуске переход извлекает фишки из своих входных позиций в соответствии с нагрузками дуг, при завершении добавляет фишки в выходные позиции. Переход завершается через  $d_t$  тактов времени после запуска.

Формальное определение правил функционирования временной сети Петри приведено в [1]. На основе этих правил в указанной работе построено *уравнение состояний временной сети*:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu'_p(\tau) = \mu_p(\tau - 1) + \sum_{t \in \overset{\bullet}{p}} w_{t,p} \cdot u_t(\tau - d_t) \\ \mu_p(\tau) = \mu'_p(\tau) - \sum_{t \in \overset{\bullet}{p}} w_{p,t} \cdot u_t(\tau) \\ \mu_p(\tau) \geq 0, p \in P \\ v_t(\tau) = \& \mu'_q(\tau) / w_{q,t} \\ 0 \leq u_t(\tau) \leq v_t(\tau), t \in T \\ S(0) = S_0, \tau = 1, 2, \dots \end{array} \right. \quad (1)$$

Отметим, что операция конъюнкции интерпретируется как в непрерывной логике:  $x \& y = \min(x, y)$ ; а операция деления является делением нацело (без остатка). Величина  $v_t$  равна количеству возбуждённых каналов перехода  $t \in T$ ;  $\mu'$  - промежуточная маркировка в момент смены тактов, полученная в результате завершения ранее запущенных переходов;  $\overset{\bullet}{p}, \overset{\bullet}{p}$  - множества входных и выходных переходов позиции  $p \in P$  соответственно;  $\overset{\bullet}{t}$  - множество входных позиций перехода  $t \in T$ .

Уравнение состояний является полным формальным описанием динамики временной сети Петри. Заметим, что система (1) содержит не только уравнения, но и неравенства, что отражает недетерминированный характер поведения сети. Заметим, что недетерминированность обусловлена тем, что, во-первых, не требуется немедленный запуск возбуждённого перехода и, во-вторых, конфликтами при запуске переходов, имеющих общие входные позиции.

Если заданы дополнительные ограничения  $C: T \rightarrow \mathbf{N}$  на число каналов каждого перехода, то систему (1) необходимо дополнить ограничениями на количество одновременно запущенных каналов переходов:

$$\sum_{\theta=0, d_t-1} u_t(\tau - \theta) \leq c_t, t \in T, \tau = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Для сети  $N_1$ , изображённой на Рис. 1, будем использовать вектор  $\bar{c}$  ограничений на количество каналов переходов равный (1,3,6,1).

### Фундаментальное уравнение временной сети Петри

Допустимой последовательностью запусков переходов временной сети Петри будем называть последовательность  $\sigma = U(1), U(2), \dots, U(\tau)$ , удовлетворяющую уравнению состояний (1).

Рассмотрим допустимую последовательность  $\sigma$  запусков переходов временной сети Петри, приводящую сеть в состояние  $S: S_0 \xrightarrow{\sigma} S$ . Состояние  $S$  в этом случае будем называть *достижимым*. Введём векторы счёта запусков и завершений переходов. При этом будем подразумевать, что позиции и переходы сети, а также соответствующие им элементы, занумерованы в определённом порядке; при этом количество позиций равно  $m: |P| = m$ , а количество переходов равно  $n: |T| = n$ .

Вектором счёта запусков переходов будем называть  $\bar{\gamma}^-(\sigma) = \|\gamma_t^-(\sigma) | t \in T\|$ , где

$$\gamma_t^-(\sigma) = \sum_{\theta=1, \tau} u_t(\theta) \quad (3)$$

Вектором счёта завершений переходов будем называть  $\bar{\gamma}^+(\sigma) = \|\gamma_t^+(\sigma) | t \in T\|$ ,

где

$$\gamma_t^+(\sigma) = \sum_{\theta=1, \tau} u_t(\theta - d_t) \quad (4)$$

В дальнейшем изложении при рассмотрении векторов счёта символ последовательности  $\sigma$  будем опускать, подразумевая некоторую допустимую последовательность запусков переходов сети.

Введём матрицы кратности входящих и исходящих дуг переходов сети.

Матрицей кратности входящих дуг будем называть  $A^- = \|a_{i,j}^-\|$ , где

$$a_{i,j}^- = \begin{cases} 0, (p_i, t_j) \notin F \\ w_{p_i, t_j}, (p_i, t_j) \in F \end{cases}$$

Матрицей кратности исходящих дуг будем называть  $A^+ = \|a_{i,j}^+\|$ , где

$$a_{i,j}^+ = \begin{cases} 0, (t_j, p_i) \notin F \\ w_{p_i, t_j}, (t_j, p_i) \in F \end{cases}$$

Выпишем уравнение состояний (1) для каждого такта времени и выразим маркировку сети в произвольном такте  $\tau$  через начальную маркировку:

$$\mu_p(\tau) = \mu_p(0) + \sum_{\theta=1, \tau} \sum_{t \in p^*} w_{t,p} \cdot u_t(\theta - d_t) - \sum_{\theta=1, \tau} \sum_{t \in p^*} w_{p,t} \cdot u_t(\theta)$$

Изменив порядок суммирования и, учитывая (3), (4), получим:

$$\mu_p(\tau) = \mu_0 + \sum_{t \in p^*} w_{t,p} \cdot \gamma_t^+ - \sum_{t \in p^*} w_{p,t} \cdot \gamma_t^-$$

Либо, используя матричную форму записи:

$$\bar{\mu}(\tau) = \bar{\mu}_0 + A^+ \cdot \bar{\gamma}^+ - A^- \cdot \bar{\gamma}^- \quad (5)$$

Уравнение (5) будем называть *фундаментальным уравнением временной сети Петри*. Объединив матрицы входящих и исходящих дуг, получим более компактное представление уравнения (5):

$$\bar{\mu}(\tau) = \bar{\mu}_0 + A \cdot \bar{\gamma} \quad (6)$$

При этом  $A = \|A^+, -A^-\|$ ,  $\bar{\gamma} = \left\| \begin{matrix} \bar{\gamma}^+ \\ \bar{\gamma}^- \end{matrix} \right\|$ .

Заметим, что хотя уравнение (6) по форме совпадает с фундаментальным уравнением базовой сети Петри, матрица  $A$  и вектор  $\bar{\gamma}$  имеют отличную размерность и структуру. Для базовой сети [2] используется матрица инцидентных нагрузок  $B = A^+ - A^-$  и вектор счёта срабатываний  $\bar{y} = \bar{\gamma}^+ = \bar{\gamma}^-$ .

**Утверждение.** Для любой допустимой последовательности  $\sigma$  и любого  $t \in T$  выполняется неравенство

$$|\gamma_t^+(\sigma) - \gamma_t^-(\sigma)| \leq c_t$$

*Доказательство.* Запишем выражения (3) и (4), выделив в них суммы на начальном и конечном интервалах продолжительностью равных времени срабатывания перехода:

$$\gamma_t^-(\sigma) = \sum_{\theta=1, \tau-d_t} u_t(\theta) + \sum_{\theta=\tau-d_t+1, \tau} u_t(\theta)$$

$$\gamma_t^+(\sigma) = \sum_{\theta=-d_t+1, 0} u_t(\theta) + \sum_{\theta=1, \tau-d_t+1} u_t(\theta)$$

Тогда

$$\gamma_t^+(\sigma) - \gamma_t^-(\sigma) = \sum_{\theta=-d_t+1, 0} u_t(\theta) - \sum_{\theta=\tau-d_t+1, \tau} u_t(\theta)$$

Учитывая ограничение (2) и неотрицательность величин  $u_t$ , получим

$$|\gamma_t^+(\sigma) - \gamma_t^-(\sigma)| \leq c_t \quad \blacksquare$$

Полученное неравенство будем использовать далее в векторной форме записи

$$|\bar{\gamma}^- - \bar{\gamma}^+| \leq \bar{c} \quad (7)$$

Так как состояние временной сети включает в себя также характеристики переходов, фундаментальное уравнение (4) необходимо дополнить уравнением представляющим *динамику активности переходов*. Для каждого перехода временной сети введём величину  $\rho_t(\tau)$  равную количеству каналов перехода  $t \in T$  активных в такте  $\tau$ :

$$\rho_t(\tau) = \sum_{\theta=0, d_t-1} u_t(\tau - \theta).$$

Так как запуск перехода  $t$  увеличивает величину  $\rho_t$  на единицу, а завершение перехода  $t$  уменьшает величину  $\rho_t$  на единицу, изменение количества активных каналов переходов во времени описывается уравнением

$$\rho_t(\tau) = \rho_t(\tau - 1) - u_t(\tau - d_t) + u_t(\tau)$$

Выразив значение  $\rho_t$  в произвольном такте через начальное значение, получим

$$\rho_t(\tau) = \rho_t(0) - \sum_{\theta=1, \tau} u_t(\theta - d_t) + \sum_{\theta=1, \tau} u_t(\theta)$$

Или в матричной форме записи, учитывая (3), (4), запишем

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_0 - E \cdot \bar{\gamma}^+ + E \cdot \bar{\gamma}^- \quad (8)$$

Где  $E$  - единичная квадратная матрица размерности  $n$ , а  $\bar{\rho}_0 = \|\rho_t(0)\|$ .

Либо в компактной форме записи

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_0 + R \cdot \bar{\gamma} \quad (9)$$

Где  $R = \|-E, E\|$ .

### **Инварианты состояния сети**

Если определять инвариант состояния временной сети Петри исходя из свойства сохранения взвешенной суммы фишек, имеющего место в базовых сетях

[4], то мы получим противоречие. Действительно, свойством  $\bar{x} \cdot \bar{\mu} = \bar{x} \cdot \bar{\mu}_0$  обладает неотрицательный целочисленный вектор  $\bar{x}$  являющийся решением уравнения  $\bar{x} \cdot A = 0$ . Но так как в силу определения матрицы  $A$  каждый её столбец содержит ненулевые значения одного знака, уравнение имеет только тривиальное решение.

На интуитивном уровне этот факт имеет достаточно простое объяснение. Действительно, от временной сети не следует требовать строгого сохранения взвешенной суммы фишек в позициях, так как запуск и завершение перехода разделены некоторым интервалом времени, а запуски различных переходов независимы в пределах, определяемых уравнением состояний. Отток фишек, вызванный запуском некоторого перехода, может компенсировать лишь приток фишек, вызванный завершением какого-либо перехода сети; однако эти события не связаны некоторой явной зависимостью, представимой линейным уравнением.

Далее в зависимости от того, рассматривается ли только маркировка сети, либо учитывается также и состояние её переходов, будем определять частичные либо полные инварианты состояния.

*Частичный инвариант состояния временной сети Петри* введём как инвариант позиций соответствующей базовой сети Петри, а именно как целое неотрицательное решение уравнения

$$\bar{x} \cdot B = 0 \quad (10)$$

Исследуем свойства частичного инварианта. Запишем фундаментальное уравнение временной сети (5) и домножим его слева на вектор  $\bar{x}$ ; получим

$$\bar{x} \cdot \bar{\mu} = \bar{x} \cdot \bar{\mu}_0 + \bar{x} \cdot (A^+ \cdot \bar{\gamma}^+ - A^- \cdot \bar{\gamma}^-)$$

Добавим и вычтем в скобках величину  $A^+ \cdot \bar{\gamma}^-$  и перегруппируем термы:

$$\bar{x} \cdot \bar{\mu} = \bar{x} \cdot \bar{\mu}_0 + \bar{x} \cdot ((A^+ - A^-) \cdot \bar{\gamma}^- + A^+ \cdot (\bar{\gamma}^+ - \bar{\gamma}^-))$$

И далее, раскрыв скобки:

$$\bar{x} \cdot \bar{\mu} = \bar{x} \cdot \bar{\mu}_0 + \bar{x} \cdot (A^+ - A^-) \cdot \bar{\gamma}^- + \bar{x} \cdot A^+ \cdot (\bar{\gamma}^+ - \bar{\gamma}^-)$$

Учитывая определение инварианта, имеем

$$\bar{x} \cdot \bar{\mu} = \bar{x} \cdot \bar{\mu}_0 + \bar{x} \cdot A^+ \cdot (\bar{\gamma}^+ - \bar{\gamma}^-)$$

Далее, принимая во внимание, что  $\bar{x} \geq 0, \bar{\mu} \geq 0, \bar{\mu}_0 \geq 0, A^+ \geq 0$ , имеем

$$\bar{x} \cdot \bar{\mu} \leq \bar{x} \cdot \bar{\mu}_0 + \bar{x} \cdot A^+ \cdot |\bar{\gamma}^+ - \bar{\gamma}^-|$$

и, подставив ограничение (7), получим

$$\bar{x} \cdot \bar{\mu} \leq \bar{x} \cdot (\bar{\mu}_0 + A^+ \cdot \bar{c}) = L_{\bar{x}} = const \quad (11)$$

Таким образом, взвешенная сумма фишек инвариантной временной сети не возрастает в процессе её функционирования.

*Полный инвариант состояния временной сети Петри* определим исходя из постоянства взвешенной суммы маркеров и активных каналов переходов. Запишем полное фундаментальное уравнение временной сети, объединив (6) и (9)

$$\begin{cases} \bar{\mu} = \bar{\mu}_0 + A \cdot \bar{\gamma} \\ \bar{\rho} = \bar{\rho}_0 + R \cdot \bar{\gamma} \end{cases}$$

В компактной форме, объединив матрицы, получим

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_0 + H \cdot \bar{\gamma} \quad (12)$$

$$\text{где } \bar{\lambda} = \|\bar{\mu}, \bar{\rho}\|, H = \begin{vmatrix} A \\ R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A^+, -A^- \\ -E, E \end{vmatrix}$$

Инвариантом состояния временной сети (полным) будем называть целый неотрицательный вектор  $\bar{z}$ , являющийся решением уравнения

$$\bar{z} \cdot H = 0 \quad (13)$$

Домножив уравнение (12) слева на  $\bar{z}$ , получим основное свойство инварианта состояния

$$\bar{z} \cdot \bar{\lambda} = \bar{z} \cdot \bar{\lambda}_0 = L_{\bar{z}} = \text{const} \quad (14)$$

Заметим, что для выполнения этого свойства не требуется ограничивать количество каналов переходов сети, так как неравенство (7) не использовалось для его получения.

### Инварианты поведения сети

При исследовании инвариантов поведения будем рассматривать временные сети, повторяющие своё начальное состояние в процессе функционирования. Циклическое поведение играет важную роль в искусственных и естественных системах [4]. Действительно, производственные и другие процессы характеризуются циклическостью; причём важную роль играет нахождение циклов, имеющих минимальную продолжительность, позволяющих эффективно организовать производство [5].

В зависимости от того, повторяет ли временная сеть Петри полностью своё состояние, либо только маркировку позиций, будем различать полные и частичные инварианты поведения.

*Инвариант поведения (полный) временной сети Петри* определим как инвариант переходов соответствующей базовой сети, а именно, как целое неотрицательное решение уравнения

$$B \cdot \bar{y} = 0 \quad (15)$$

Исследуем свойства полного инварианта поведения. Для этого рассмотрим допустимую последовательность срабатываний переходов  $\sigma$  такую что  $S_0 \xrightarrow{\sigma} S$  и, кроме того,  $S = S_0$ . Тогда, так как  $U = U_0$  и, следовательно,

$u_t(\tau - \theta) = u_t(0 - \theta), \theta = \overline{0, d_t - 1}, t \in T$ . Тогда  $\bar{y}^+ = \bar{y}^-$ . Обозначив  $\bar{y} = \bar{y}^+ = \bar{y}^-$  и учитывая, что  $\bar{\mu} = \bar{\mu}_0$  из фундаментального уравнения временной сети (5) получим

$$A^+ \cdot \bar{y} - A^- \cdot \bar{y} = 0$$

Вынесем столбец неизвестных за скобки и получим уравнение сетевого инварианта. Таким образом, полный инвариант поведения временной сети описывает векторы счёта запусков и завершений последовательностей срабатывания переходов, приводящих сеть в начальное состояние.

Во многих случаях моделирования реальных систем и процессов, в особенности производственных, маркировка временной сети Петри является наиболее существенной частью информации о её состоянии. Так, например, важно количество готовых изделий, деталей и заготовок. Поэтому имеет смысл рассматривать поведение сети, приводящее к повторению её маркировки. Кроме

того, абстрагирование от состояния переходов позволяет построить циклические процессы, имеющие минимальную длительность, что в ряде случаев очень важно для эффективной организации производственных процессов.

*Частичный инвариант поведения временной сети Петри* определим как целый неотрицательный вектор, являющийся решением уравнения

$$A \cdot \bar{g} = 0 \quad (16)$$

При наличии ограничений на количество каналов переходов сети (7) мы будем также требовать, чтобы инвариант удовлетворял неравенству

$$|\bar{g}^+ - \bar{g}^-| \leq \bar{c}$$

Свойство частичного инварианта связанное с представлением векторов счёта запусков и завершений переходов для допустимых последовательностей запусков переходов, приводящих к повторению начальной маркировки, непосредственно следует из фундаментального уравнения временной сети Петри (6).

*Правильной последовательностью частичных инвариантов поведения временной сети Петри* будем называть такую последовательность, сумма элементов которой является полным инвариантом сети:

$$\bar{g}_1, \bar{g}_2, \dots, \bar{g}_k : \sum_{i=1,k} \bar{g}_i^+ = \sum_{i=1,k} \bar{g}_i^- = \bar{y}$$

Правильные последовательности частичных инвариантов позволяют организовать полные циклические процессы с повторением начальной маркировки внутри цикла. Такая последовательность действий является основой для проектирования эффективных производственных процессов [4,5].

### **Свойства инвариантных временных сетей Петри**

Установим основные свойства инвариантов временных сетей Петри, а также взаимосвязь частичных и полных инвариантов. Одними из ключевых свойств сетей Петри являются ограниченность и живость [2,4]. Уточним определения указанных свойств для временной сети Петри.

Позицию  $p \in P$  будем называть *ограниченной*, если для каждого допустимого состояния  $S$  выполняется неравенство  $\mu_p \leq \hat{\mu}_p = const$ . *Сеть ограничена*, если все её позиции ограничены.

Переход  $t \in T$  будем называть *живым*, если для любого достижимого состояния  $S$  существует допустимая последовательность  $\sigma$ , в которой переход  $t$  будет запущен, по крайней мере, один раз:  $\gamma_t^-(\sigma) > 0$ . *Сеть жива*, если все её переходы живы.

Заметим, что определение живости для временной сети подразумевает также и завершение перехода  $t$  так как это событие наступает однозначно через  $d_t$  тактов времени после запуска.

Утверждение. Ограниченная сеть имеет конечное множество состояний.

*Доказательство.* Укажем явные ограничения для количества состояний. В соответствии с определением ограниченности сеть может иметь не более  $\prod_{p \in P} (\hat{\mu}_p + 1)$  маркировок. Учитывая, что максимальная маркировка позиции  $p \in P$

может возбудить не более  $\hat{\mu}_p / w_{p,t}$  каналов перехода  $t \in p^\bullet$ , имеем следующие ограничения на количество каналов перехода сети  $t \in T$ , запущенных в произвольном такте:  $u_t \leq \bigwedge_{p \in \bullet t} \frac{\hat{\mu}_p}{w_{p,t}} = \hat{u}_t = const$ . Так как состояние перехода в каждом

такте использует предысторию запусков за период равный  $d_t$ , общее ограничение на количество состояний сети может быть представлено следующим выражением:

$$\prod_{p \in P} (\hat{\mu}_p + 1) \cdot \prod_{t \in T} (d_t \cdot (\hat{u}_t + 1)) \quad \blacksquare$$

Таким образом, ограниченная сеть имеет конечное множество состояний, а живая сеть в соответствии с определением не содержит тупиков, что очень важно для моделируемых систем и процессов.

**Теорема 1.** Временная сеть, имеющая инвариант состояния, не содержащий нулевых компонентов, ограничена.

*Доказательство.* Выполним доказательство теоремы отдельно для частичных и полных инвариантов сети. При этом для сети, имеющей частичный инвариант, будем использовать ограничение на количество каналов переходов сети (7).

А) Частичный инвариант. Выполним доказательство для произвольной позиции сети  $p_l \in P$ . Как было показано ранее, неравенство (11) выполняется для любого достижимого состояния временной сети Петри; выпишем его, выделив в левой части терм, соответствующий указанной позиции:

$$x_l \cdot \mu(p_l) + \sum_{i \neq l} x_i \cdot \mu(p_i) \leq \bar{x} \cdot (\bar{\mu}_0 + A^+ \cdot \bar{c}) \quad (17)$$

В силу неотрицательности инварианта  $\bar{x}$  и маркировки имеем

$$\sum_{i \neq l} x_i \cdot \mu(p_i) \geq 0$$

Тогда, учитывая неотрицательность всех термов неравенства (17), получим

$$x_l \cdot \mu(p_l) \leq \bar{x} \cdot (\bar{\mu}_0 + A^+ \cdot \bar{c})$$

Разделив обе части неравенства на натуральное число  $x_l$ , получим

$$\mu(p_l) \leq \frac{\bar{x} \cdot (\bar{\mu}_0 + A^+ \cdot \bar{c})}{x_l} = const$$

В силу произвольности выбора  $p_l$  аналогичное ограничение можно указать для каждой позиции сети и, следовательно, сеть ограничена, что и требовалось доказать.

Б) Полный инвариант. Выпишем равенство (14), характеризующее сохранение взвешенной суммы фишек и активных каналов переходов, и применим к нему технику доказательства, использованную в разделе А). Получим

$$\mu(p_l) \leq \frac{\bar{z} \cdot \bar{\lambda}_0}{z_l} = const$$

Таким образом, исходная сеть ограничена  $\blacksquare$

Следует отметить, что доказанная в Теореме 1 ограниченность инвариантной сети является структурным свойством которое выполняется при любом допустимом начальном состоянии (маркировке).

Лемма. В живой временной сети Петри для любого достижимого состояния существует допустимая последовательность запусков, содержащая все переходы сети.

*Доказательство.* По определению живости сети имеем:

$$S_0 \xrightarrow{\sigma_1} S_1 \xrightarrow{\sigma_2} S_2 \rightarrow \dots \xrightarrow{\sigma_n} S_n$$

При этом  $\sigma_1$  содержит по крайней мере  $t_1$ ,  $\sigma_2$  по крайней мере  $t_2$  и так далее. Тогда допустимая последовательность запусков переходов  $\sigma = \sigma_1\sigma_2\dots\sigma_n$  содержит все переходы сети; следовательно, все компоненты вектора  $\bar{\gamma}^-(\sigma)$  положительны ■

Теорема 2. Живая ограниченная временная сеть, имеет инвариант поведения, не содержащий нулевых компонентов.

*Доказательство.* Используя Лемму, построим

$$S_0 \xrightarrow{\sigma_1} S_1 \xrightarrow{\sigma_2} S_2 \rightarrow \dots$$

Причём каждая из  $\sigma_i$  содержит все переходы сети. В соответствии с доказанным ранее утверждением количество состояний сети конечно. Поэтому в построенной последовательности в некотором такте  $\tau$  получим состояние  $S_j$ , совпадающее с предыдущим  $S_i$ :  $S_i = S_j$ . При этом последовательность  $\sigma: S_i \xrightarrow{\sigma} S_j$ , определяет инвариант поведения сети  $\bar{y}$ , все компоненты которого положительны, так как  $\sigma$  содержит все переходы:

$$\bar{y} = \bar{\gamma}^-(\sigma) = \bar{\gamma}^+(\sigma) \quad \blacksquare$$

Таким образом, наличие инварианта поведения является необходимым условием живости временной сети и, следовательно, основой для построения эффективных штатных циклов функционирования производственных [3,4] и организационных [4] систем.

Для исследования свойств ограниченности и живости подмножеств позиций и переходов исходной временной сети Петри, как и в работах [2,4], могут быть введены понятия суппортов инвариантов и исследованы инварианты, имеющие ненулевые значения лишь для указанных подмножеств элементов сети.

Заметим, что использование частичных инвариантов, как правило, целесообразно в тех случаях, когда сеть не имеет полных инвариантов. Следующая теорема позволяет сопоставить возможности полных и частичных инвариантов как инструментов исследования свойств временных сетей Петри.

Теорема 3. Временная сеть Петри, имеющая полный инвариант, имеет также и частичный.

*Доказательство.* Доказательство теоремы выполним отдельно для инвариантов состояния и инвариантов поведения временной сети Петри.

А) Инварианты состояния. Выпишем уравнение полного инварианта состояния (13), выделив компоненты матрицы  $H$ :

$$\begin{cases} \bar{z}^+ \cdot A^+ - \bar{z}^- \cdot E = 0 \\ -\bar{z} \cdot A^- + \bar{z}^- \cdot E = 0 \end{cases}$$

Сложим первое уравнение системы со вторым и получим

$$\bar{z}^+ \cdot (A^+ - A^-) = 0$$

Представляющее собой уравнение частичного инварианта (10) при  $\bar{x} = \bar{z}^+$ . Следовательно, компонент  $\bar{z}^+$  полного инварианта состояния  $\bar{z}$  временной сети Петри является частичным инвариантом состояния сети, что и требовалось доказать.

Б) Инварианты поведения. Выпишем уравнение полного инварианта поведения (15), выделив структуру матрицы  $B$ :

$$(A^+ - A^-) \cdot \bar{y} = 0$$

И далее

$$A^+ \cdot \bar{y} - A^- \cdot \bar{y} = 0$$

Обозначив  $\bar{g} = \left\| \begin{matrix} \bar{y} \\ \bar{y} \end{matrix} \right\|$ , получим уравнение частичного инварианта поведения (16).

Следовательно, из произвольного полного инварианта поведения временной сети Петри может быть построен частичный инвариант ■

Таким образом, частичные инварианты являются более тонким инструментом для исследования свойств временных сетей Петри.

### **Исследование систем и процессов с помощью сетевых инвариантов**

Далее рассмотрим конкретные временные сети Петри, моделирующие реальные производственные процессы и исследуем их свойства с помощью инвариантов состояния и поведения.

Исследуем сеть  $N_1$ , изображённую на Рис. 1. Для этого найдём сетевые инварианты.

*Частичный инвариант состояния (10):  $\bar{x} \cdot B = 0$ .*

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

С помощью метода Тудика [6,2] построим фундаментальное решение системы:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Минимальным частичным инвариантом состояния, все компоненты которого положительны, является

$$\bar{x} = (1 \ 1 \ 5 \ 1 \ 1 \ 1)$$

*Полный инвариант состояния (13):  $\bar{z} \cdot H = 0$ .*

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & -3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Фундаментальное решение системы:

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 & 5 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & 1 & 2 & 0 & 9 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Минимальным полным инвариантом состояния, все компоненты которого положительны, является

$$\bar{z} = (1 \ 1 \ 5 \ 1 \ 1 \ 1 \ 7 \ 7 \ 3 \ 4)$$

Полный инвариант поведения (15):  $B \cdot \bar{y} = 0$ . Фундаментальное решение системы:

$$Y = (1 \ 1 \ 3 \ 1)$$

Частичный инвариант поведения (16):  $A \cdot \bar{g} = 0$ . Матрица  $A$  содержится в первых шести строках построенной ранее матрицы  $H$ . Фундаментальное решение системы:

$$G = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 & 4 & 4 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 9 & 1 & 1 & 0 & 15 & 0 \end{pmatrix}$$

Частичные инварианты поведения  $\bar{g}_1$  и  $\bar{g}_2$  составляют правильную последовательность и образуют полный инвариант  $\bar{y} = (5,5,15,5)$ . На Рис. 3 представлена диаграмма срабатываний переходов стационарно повторяющегося процесса, удовлетворяющего указанному инварианту поведения. Таблица 1 содержит значения элементов состояния сети для построенного стационарно повторяющегося процесса. Отметим, что в соответствии со свойствами частичных инвариантов поведения сеть повторяет свою начальную маркировку в тактах 5, 10, 15, а также, в соответствии со свойствами полного инварианта поведения, повторяет своё начальное состояние в такте 10. Таким образом, график выполнения работ на производственном участке соответствующий временной диаграмме, представленной на Рис.3, обеспечивает минимальную длительность производственного цикла.

Для построенных инвариантов состояния в соответствии с (11) и (14) получим  $L_{\bar{x}} = 78$  и  $L_{\bar{z}} = 43$ . Из Таблицы 1 видно, что взвешенная сумма фишек  $\bar{x} \cdot \bar{\mu}$  не превышает  $L_{\bar{x}}$ , взвешенная сумма фишек и активных каналов  $\bar{z} \cdot \bar{\lambda}$  остаётся

постоянной и равной  $L_{\bar{z}}$ . Ограничения ёмкости позиций, полученные с помощью этих величин, представлены в Таблице 2. В соответствии с этими ограничениями может быть выполнен выбор ёмкости физических накопителей деталей и заготовок для моделируемого участка производства.

Сеть  $N_2$ , представленная на Рис. 2 и моделирующая транспортную подсистему автоматизированного производства, не имеет ни полных, ни частичных инвариантов состояния, что свидетельствует о возможном переполнении используемых накопителей. И действительно, повторение последовательности запуска переходов  $t_2 t_3 t_4$  приводит к неограниченному росту количества маркеров в позиции  $p_3$ .

### **Заключение**

Из уравнения состояний [1], являющегося формальным описанием динамики временной сети Петри, в настоящей работе построено линейное фундаментальное уравнение сети, приближённо описывающее процесс её функционирования. Линейность представления достигнута с помощью операции временной свёртки, использованной при переходе от конкретных допустимых последовательностей запусков переходов сети к векторам счёта запусков и завершений переходов. Следует отметить, что фундаментальное уравнение временной сети существенно отличается от известного [7] фундаментального уравнения базовой сети Петри.

На основе фундаментального уравнения временной сети Петри введены инварианты состояния и инварианты поведения временной сети, являющиеся аналогами р- и t-инвариантов базовой сети соответственно [2]. В зависимости от того, рассматривается ли полное состояние временной сети, включающее в себя также и состояния переходов, либо только маркировка позиций, предложено различать полные и частичные инварианты сети. Показано, что нахождение инвариантов временных сетей может быть выполнено с помощью известного метода Тудика [6].

Исследованы свойства инвариантных временных сетей Петри, в частности установлено, что сеть, имеющая инварианты состояния, ограничена, а живая сеть обладает инвариантами поведения. Также показана взаимосвязь полных и частичных инвариантов и установлено, что частичные инварианты являются более тонким инструментом исследования свойств временной сети Петри.

С помощью предложенных методов в работе изучены конкретные временные сети Петри, моделирующие производственные процессы, для которых решены задачи выбора ёмкости накопителей и построения минимального технологического цикла производства изделий.

Следует отметить, что результаты получены для класса обобщённых временных сетей, допускающих повторные запуски активных переходов.

### **Список литературы**

1. Зайцев Д.А., Слепцов А.И. Уравнение состояний и эквивалентные преобразования временных сетей Петри // Кибернетика и системный анализ. - 1997, №5, с. 59-76.

2. Бандман О.Л. Поведенческие свойства сетей Петри / Известия АН СССР. Техническая кибернетика. - 1987, № 5, с. 134-150.

3. Зайцев Д.А., Слепцов А.И. Визуализация производственных процессов в инструментальной системе диспетчера машиностроительного предприятия // Автометрия.- 1990, №4, с. 90-93.

4. Слепцов А.И., Юрасов А.А. Автоматизация проектирования управляющих систем гибких автоматизированных производств / Под ред. Б.Н. Малиновского. - К. Техніка, 1986.- 160 с.

5. Chretienne P. Execution controles des reseaux de Petri synchronyses // Techn. et sci. Inform., - 1984, Vol. 3, № 1, pp. 23-31.

6. Toudic J.M. Linear Algebra Algorithms for the Structural Analysis of Petri Nets. - Rev. Tech. Thomson CSF, 1982, Vol. 14, № 1, pp. 137-156.

7. Murata T. State equations, Controllability and Maximal Matching of Petri Nets // IEEE Trans. On Autom. Control.,- 1977, № 3, pp. 412-416.

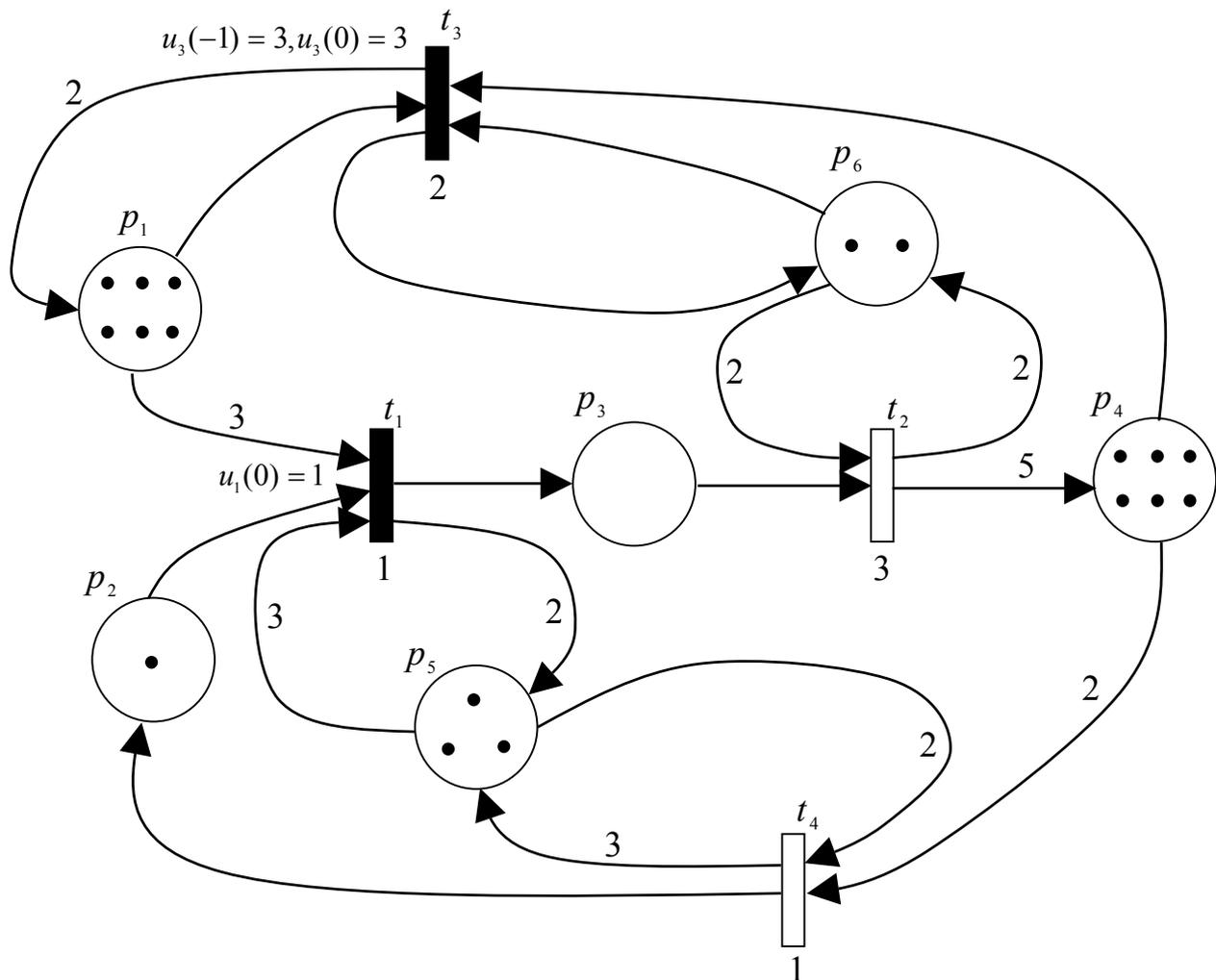


Рис. 1. Временная сеть Петри  $N_1$ .

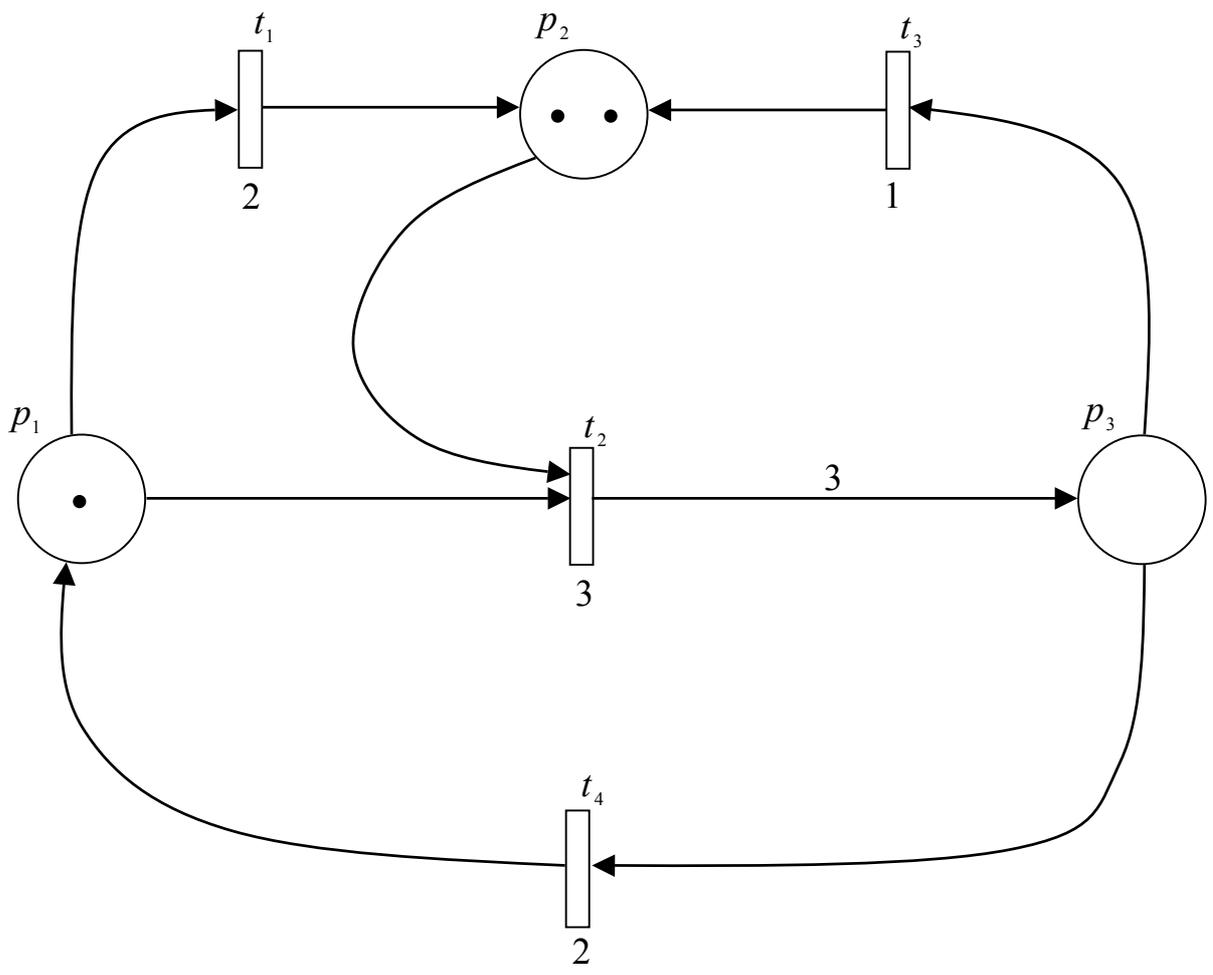


Рис. 2. Временная сеть Петри  $N_2$ .

р	1	2	3	4	5	6
Частичный инвариант	78	78	16	78	78	78
Полный инвариант	43	43	9	43	43	43

Таблица 2. Ограничения ёмкости позиций сети  $N_1$ .

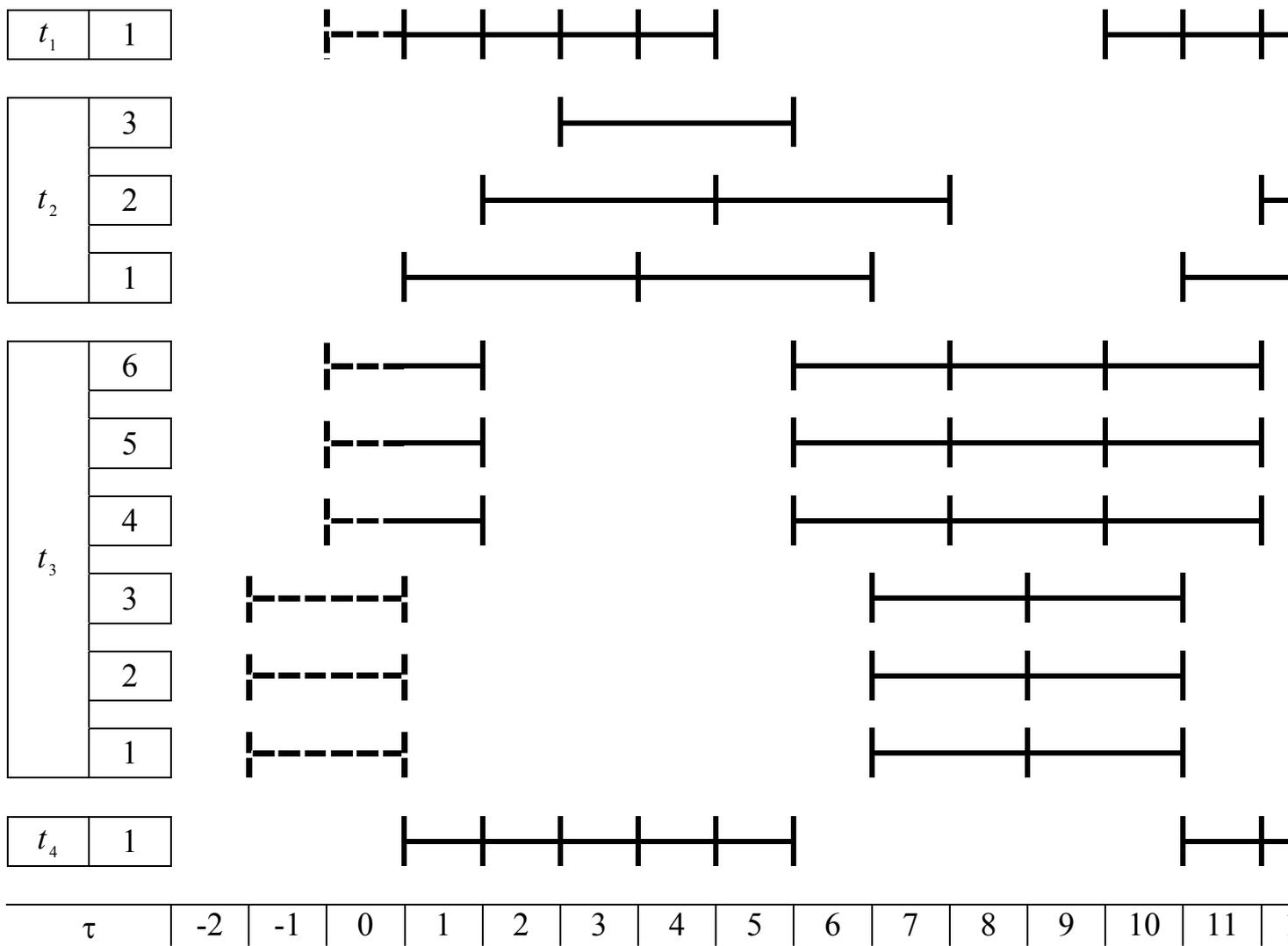


Рис. 3. Временная диаграмма стационарно повторяющегося процесса для сети  $N_1$ .

	$\tau$	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\mu$	1			6	9	12	9	6	6	3	0	3	6	6	9	12	9	6
	2			1	0	0	0	0	1	2	2	2	2	1	0	0	0	0
	3			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	4			6	4	2	0	3	6	8	10	12	9	6	4	2	0	3
	5			3	0	0	0	0	3	6	6	6	6	3	0	0	0	0
	6			2	3	4	2	2	2	1	0	2	2	2	3	4	2	2
$U$	1		0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
	2		0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
	3		3	3	0	0	0	0	0	3	3	3	3	3	0	0	0	0
	4		0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
$\rho$	1		0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
	2		0	0	1	2	3	3	3	2	1	0	0	0	1	2	3	3
	3		3	6	3	0	0	0	0	3	6	6	6	6	3	0	0	0
	4		0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
$\bar{x} \cdot \bar{\mu}$			18	16	18	11	11	18	20	18	25	25	18	16	18	11	11	

Таблица 1. Динамика изменения состояния стационарно повторяющегося процесса.