

Системный анализ
УДК 519.74

Д.А. Зайцев

Декомпозиция сетей Петри сеть Петри, подсеть, декомпозиция, алгоритм Petri net, subnet, decomposition, algorithm

Введение

Популярность теории сетей Петри значительно возросла в последнее время в связи с расширением областей приложения охватывающих организацию параллельных вычислений, проектирование электронных устройств, верификацию сетевых протоколов, управление производственными процессами и робототехническими комплексами, управление движением транспортных средств. Этот далеко не полный перечень можно расширить такими экзотическими предметными областями, как планирование военных операций, моделирование ядерных и химических реакций.

За три последних десятилетия издано около десятка монографий, в которых представлены основные теоретические результаты и выполнен анализ многочисленных предметных областей, а также моделей реальных систем и процессов. В кратком обзоре наиболее известных трудов следует отметить, что работа [1] отличается широтой охвата предметных областей и простотой изложения материала; монография [2] носит более теоретический характер и имеет строгий математический стиль изложения; в работе [3] представлены специфические результаты, связанные с нахождением сетевых инвариантов и редукцией сетей; в монографии [4] вводится обобщённый класс нагруженных сетей, исследуются их свойства и рассматриваются методы построения моделей и алгоритмов управления для сложных производственных систем.

Задача построения моделей систем и процессов путём объединения (композиции) моделей основных компонентов рассматривалась практически во всех перечисленных выше работах. В [1] предложено объединять сети путём наложения (совмещения) их позиций; в [2] исследуются регулярные сети, построенные из элементарных путём объединения специальных контактных позиций. В [4,7] внешние (контактные) позиции сети разбиваются на два класса входных и выходных и вводятся специальные правила объединения позиций противоположных классов при композиции моделей и алгоритмов. Таким образом, задача композиции сетей является достаточно хорошо изученной.

Необходимость разработки обратных методов, позволяющих разбивать общую модель на составные части отмечалась в [2,4]. И если для сетей с контактными позициями, как показано в [2], задача декомпозиции является тривиальной, поскольку произвольное подмножество переходов порождает подсеть с контактными позициями, то для сетей с входными и выходными позициями [4,5,6] требуется специальное исследование. Результаты такого исследования и представлены в настоящей работе.

Следует отметить, что делимость на подсети с входными и выходными позициями формулируется как структурное свойство сети Петри. Классическими примерами структурных свойств могут служить p -, t -инвариантность, наличие сифонов, ловушек [1,2,3]. Эти свойства верны при любой разметке сети. Таким образом, полученные результаты справедливы для произвольного двудольного ориентированного графа [8].

Основные понятия и определения

Сеть Петри – это тройка $N = (P, T, F)$, где $P = \{p\}$ – конечное множество вершин, называемых позициями, $T = \{t\}$ – конечное множество вершин, называемых переходами, отношение смежности вершин $F = P \times T \cup T \times P$ – задаёт множество дуг, соединяющих позиции и переходы. Таким образом, сеть Петри представляет собой двудольный ориентированный граф [8], одну долю вершин которого составляют позиции, а другую – переходы. Пример сети Петри N_1 , имеющей пять позиций и шесть переходов, представлен на Рис. 1.

В теории сетей Петри введенный граф N дополняют динамическими элементами – маркерами (фишками); маркеры располагаются в позициях и перемещаются по сети в результате срабатываний переходов [1,2]. Известно множество классов сетей Петри рассматривающих кратности дуг, времена срабатывания переходов, цвет фишек [4] и другие характеристики элементов сети. В настоящей работе понятие динамики сети не используется, а исследуются её структурные свойства, не зависящие от маркировки и других дополнительных характеристик. Поэтому полученные результаты справедливы для произвольного двудольного ориентированного графа и могут быть применены ко всем классам сетей, использующих граф N .

Введём специальные обозначения множеств входных и выходных вершин для позиций и переходов сети:

$$\bullet p = \{t \mid \exists(t, p) \in F\}, \quad p \bullet = \{t \mid \exists(p, t) \in F\}, \quad \bullet t = \{p \mid \exists(p, t) \in F\}, \quad t \bullet = \{p \mid \exists(t, p) \in F\}.$$

Аналогичным образом можно определить множества входных, выходных и смежных вершин для произвольного подмножества позиций либо переходов; такие обозначения будут использованы в дальнейшем изложении.

Сетью с входными и выходными позициями называют сеть Петри, в которой указаны специальные подмножества позиций, а именно входные и выходные. Причём при исследовании сети внешнее воздействие направлено только во входные позиции, а результат функционирования сети рассматривают только в её выходных позициях. Входные и выходные позиции ещё называют контактными. Известны различные способы определения таких сетей, связанные с наличием либо отсутствием дополнительных ограничений на дуги контактных позиций, а также с видом этих ограничений [4,5,6,7]. Наиболее регулярная структура, удобная для построения моделей систем, присуща так называемым функциональным сетям [6]. Именно такие сети и будут исследованы в настоящей работе.

Функциональной сетью будем называть тройку $Z = (N, X, Y)$, где N – сеть Петри, $X \subseteq P$ – её входные позиции, $Y \subseteq P$ – выходные позиции, причём множества входных и выходных позиций не пересекаются: $X \cap Y = \emptyset$, и, кроме того входные позиции не имеют входящих дуг, а выходные позиции исходящих: $\forall p \in X: \bullet p = \emptyset, \forall p \in Y: p \bullet = \emptyset$. Позиции из множества $Q = P \setminus (X \cup Y)$ будем называть внутренними. Таким образом, в соответствии с терминологией теории графов [8] входные позиции являются источниками, а выходные стоками. Функциональную сеть также будем обозначать $Z = (X, Q, Y, T, F)$, указывая структурные элементы сети Петри N . Опуская в первом упоминании подробности построения, заметим, что пример функциональной сети, имеющей множества входных и выходных позиций $X = \{p_1\}, Y = \{p_4, p_5\}$ соответственно, представлен на Рис. 3.

Утверждение 1. Произвольную сеть Петри N можно рассматривать как функциональную, считая, что множество X составляют источники сети N , а множество Y её стоки.

Таким образом, в дальнейшем изложении не ограничивая общности будем рассматривать функциональные сети Петри, допуская, что множества контактных позиций могут быть пустыми.

Сеть Петри $N' = (P', T', F')$ является *подсетью* сети N , если $P' \subseteq P, T' \subseteq T, F' \subseteq F$.

Подсетью, порождённой указанным множеством вершин $V(P', T')$ будем называть подсеть $N' = (P', T', F')$, где F' содержит все дуги, соединяющие вершины P', T' в исходной сети:

$$F' = \{(p, t) \mid p \in P', t \in T', (p, t) \in F\} \cup \{(t, p) \mid p \in P', t \in T', (t, p) \in F\}.$$

Подсетью, порождённой указанным множеством переходов $V(T')$ будем называть подсеть $V(P', T')$, где $P' = \{p \mid p \in P, \exists t \in T' : (t, p) \in F \vee (p, t) \in F\}$.

Иными словами вместе с переходами из T' сеть содержит все смежные им позиции и порождается этими вершинами.

Далее при рассмотрении подсетей, как правило, будем использовать все дуги, связывающие выделенные вершины в исходной сети, то есть будем рассматривать подсети, порождённые множествами вершин. Поэтому для краткости в обозначениях отношение смежности будем опускать, подразумевая исходное отношение смежности F вершин сети.

Функциональную сеть $Z = (N', X, Y)$ будем называть *функциональной подсетью* сети N и обозначать $Z \succ N$, если N' является подсетью N , и, кроме того, Z связана с оставшейся частью сети только посредством дуг, инцидентных входным либо выходным позициям, причём входные позиции могут иметь только входящие дуги, а выходные только исходящие. Таким образом имеем:

$$\begin{aligned} \forall p \in X: \{(p, t) \mid t \in T \setminus T'\} &= \emptyset, \quad \forall p \in Y: \{(t, p) \mid t \in T \setminus T'\} = \emptyset, \\ \forall t \in Q: \{(p, t) \mid t \in T \setminus T'\} &= \emptyset \wedge \{(t, p) \mid t \in T \setminus T'\} = \emptyset. \end{aligned}$$

Утверждение 2. Функциональная подсеть порождается множеством своих переходов.

Доказательство утверждения удобно организовать от противного, предположив, что подсеть содержит неизолированную позицию, инцидентную некоторому внешнему переходу, либо, предположив, что сеть не содержит некоторую позицию, инцидентную одному из внутренних переходов. Получение противоречия с определением функциональной сети в обоих случаях завершает доказательство. ■

Веденное определение функциональной подсети требует дополнительных пояснений. Во первых, так как подсеть порождается множеством своих переходов, то указание этих переходов позволяет однозначно определить подсеть. Во-вторых, введенные ограничения на дуги входных и выходных позиций, приводят к тому, что оставшаяся часть сети является также функциональной подсетью и исходная сеть может быть получена путём объединения подсетей с помощью слияния позиций противоположных классов: входных с выходными и наоборот [4,7]. На Рис. 2 представлены функциональные подсети сети Петри N_1 , изображённой на Рис. 1. Способ их построения будет описан в последующих разделах статьи.

Сеть, являющуюся *разностью* исходной сети Петри и её функциональной подсети $Z'' = N - Z'$, определим следующим образом $Z'' = (Y, P \setminus (X \cup Y \cup Q), X, T \setminus T')$.

Утверждение 3. Если $Z' \succ N$, то $N - Z' \succ N$.

Доказательством утверждения служит тот факт, что ограничения на дуги в определении функциональной подсети соответствуют требованиям определения функциональной сети и, кроме того, общими позициями являются только контактные. ■

Функциональная подсеть $Z' \succ N$ является *минимальной* тогда и только тогда, когда она не содержит другой функциональной подсети исходной сети Петри N .

Заметим, что функциональные подсети, изображённые на Рис. 2, как будет показано далее, являются минимальными функциональными подсетями сети N_1 .

Свойства функциональных подсетей

Теорема 1. Множества переходов двух произвольных минимальных функциональных подсетей Z' и Z'' сети Петри N не пересекаются.

Доказательство. Предположим противное, а именно, что множество $R = T' \cap T''$ непусто. Пусть $S = T' \setminus R$. Построим сеть $B(S)$ порождённую этим множеством переходов. Покажем, что $B(S)$ является функциональной подсетью сети Петри N . Поскольку Z'' является функциональной подсетью N , то $B(S)$ связана с вершинами подсети Z'' только посредством контактных позиций и кроме того, поскольку Z' является функциональной подсетью N , то $B(S)$ связана с вершинами подсети $N - Z'$ также только посредством контактных позиций. Причём для входных и выходных позиций $B(S)$ выполнены все ограничения функциональной подсети. Следовательно функциональная подсеть Z' содержит функциональную подсеть $B(S)$, что противоречит минимальности

Z' . Полученное противоречие и доказывает ложность исходного предположения о пересечении подмножеств T' и T'' . ■

Следствие 1. Множества внутренних позиций двух произвольных минимальных функциональных подсетей Z' и Z'' сети Петри N не пересекаются.

Следствие 2. Множество минимальных функциональных сетей $\mathfrak{Z} = \{Z^j\}$, $Z^j \succ N$ определяет разбиение множества T на непересекающиеся подмножества T^j , такие что, $T = \bigcup_j T^j$, $T^j \cap T^k = \emptyset$, $j \neq k$.

Графом функциональных подсетей заданной сети Петри N будем называть ориентированный граф $G = (Z, E)$, где множество вершин Z составляют минимальные функциональные подсети сети N , а дуги E соединяет вершины, если соответствующие подсети имеют общие контактные позиции таким образом, что: $E = \{(Z_j, Z_k) \mid \exists p : p \in Y^j, p \in X^k\}$. Граф позволяет изобразить схематически взаимосвязи функциональных подсетей исходной сети. На Рис. 4 представлен граф функциональных подсетей сети Петри N_1 .

Следует отметить, что минимальность в общем случае не означает наличие какого-либо небольшого количество позиций и переходов, а лишь предполагает дальнейшую неразложимость на внутренние функциональные подсети. При этом неразложимая сеть может быть сколь угодно большого размера. Пример неразложимой сети представлен на Рис. 5; цепочка позиций и переходов, соединённых дугами указанной конфигурации может содержать неограниченное количество вершин.

Теорема 2. Любая функциональная подсеть Z' произвольной сети Петри N является суммой (объединением) конечного числа минимальных функциональных подсетей.

Доказательство. Предположим противное, а именно, что существует функциональная подсеть Z' сети Петри N не являющаяся объединением минимальных подсетей. Поскольку \mathfrak{Z} задаёт разбиение множества T , то T' содержит части подмножеств T^j . Формально это можно представить следующим образом:

$$T' = \bigcup_{i \in I} R^i, \text{ где } I \text{ множество номеров подсетей, переходы которых}$$

содержатся в T' , $R^i \subseteq T^i$, и, кроме того, существует по крайней мере одно множество $R^j \subset T^j$ для некоторого $j \in I$. Рассмотрим множество переходов $S = T^j \setminus R^j$ и покажем, что оно порождает функциональную подсеть $B(S)$ сети Петри N . Поскольку Z' является функциональной подсетью N , то $B(S)$ связана с вершинами подсети Z' только посредством контактных позиций и, кроме того, поскольку Z^j является функциональной подсетью N , то $B(S)$ связана с вершинами подсети $N - Z^j$ также только посредством контактных позиций. Причём для входных и выходных позиций $B(S)$ выполнены все ограничения функциональной подсети. Следовательно функциональная подсеть Z^j содержит

функциональную подсеть $B(S)$, что противоречит минимальности Z^j .

Полученное противоречие и доказывает ложность исходного предположения о том, что $S \neq \emptyset$. Следовательно, T' содержит множество T^j целиком, что в силу произвольности выбора T^j и доказывает настоящую теорему. ■

Теорема может быть проиллюстрирована Рис. 3, на котором представлена сеть, являющаяся суммой двух минимальных функциональных подсетей сетей Петри N_1 .

Следствие. Разбиение множества T определяемое множеством минимальных функциональных подсетей является порождающим семейством множества функциональных подсетей сети Петри N .

Цель настоящей работы состоит в построении эффективных алгоритмов конструирования такого порождающего семейства для произвольной заданной сети Петри.

Декомпозиция сети Петри с помощью логических уравнений

Рассмотрим функциональную подсеть $Z^0 = (P^2, P^0, P^3, T^0)$ сети Петри $N = (P, T, F)$. Пусть $N - Z^0$ образует функциональную подсеть $Z^1 = (P^3, P^1, P^2, T^1)$. Взаимосвязь указанных подсетей иллюстрирует Рис. 6. Построим уравнения в исчислении предикатов первого порядка, задающие принадлежность позиций и переходов сети различным подмножествам, используя определение функциональной подсети, а также тот факт, что в соответствии с утверждением 2 Z^1 также является функциональной подсетью N .

$$\begin{cases} (t \in T^0) \equiv (\forall p \in \bullet t)((p \in P^0) \vee (p \in P^2)) \wedge (\forall p \in t^\bullet)((p \in P^0) \vee (p \in P^3)) \\ (t \in T^1) \equiv (\forall p \in \bullet t)((p \in P^1) \vee (p \in P^3)) \wedge (\forall p \in t^\bullet)((p \in P^1) \vee (p \in P^2)) \end{cases} \quad (1)$$

Аналогичным образом можно построить уравнения, определяющие принадлежность позиций сети:

$$\begin{cases} (p \in P^0) \equiv (\forall t \in \bullet p)(t \in T^0) \wedge (\forall t \in p^\bullet)(t \in T^0) \\ (p \in P^1) \equiv (\forall t \in \bullet p)(t \in T^1) \wedge (\forall t \in p^\bullet)(t \in T^1) \\ (p \in P^2) \equiv (\forall t \in \bullet p)(t \in T^1) \wedge (\forall t \in p^\bullet)(t \in T^0) \\ (p \in P^3) \equiv (\forall t \in \bullet p)(t \in T^0) \wedge (\forall t \in p^\bullet)(t \in T^1) \end{cases} \quad (2)$$

Подставим уравнения (2) в (1) и заметим, что так как $T^0 \cup T^1 = T$, а также $T^0 \cap T^1 = \emptyset$, то достаточно рассмотреть только одно из уравнений (1), например, определяющее принадлежность переходов к T^1 . Получим систему (3):

$$\begin{aligned} (t \in T^1) \equiv \\ (\forall p \in \bullet t)((\forall s \in \bullet p)(s \in T^1) \wedge (\forall s \in p^\bullet)(s \in T^1)) \vee ((\forall s \in \bullet p)(s \in T^0) \wedge (\forall s \in p^\bullet)(s \in T^1)) \wedge \\ (\forall p \in t^\bullet)((\forall s \in \bullet p)(s \in T^1) \wedge (\forall s \in p^\bullet)(s \in T^1)) \vee ((\forall s \in \bullet p)(s \in T^1) \wedge (\forall s \in p^\bullet)(s \in T^0)) \end{aligned}$$

Используя конечность множеств позиций и переходов сети, заменим кванторы общности конъюнкцией по соответствующим подмножествам элементов, а также введём индикаторы τ_t принадлежности переходов к подмножествам таким

образом, что $\tau_t = j \Leftrightarrow t \in T^j$. Заметим, что $\tau_t \in \{0,1\}$; следовательно, эти величины можно использовать в логических уравнениях. А так как $T^0 \cap T^1 = \emptyset$, то

$\tau_t \Leftrightarrow (t \in T^1)$, а также $\bar{\tau}_t \Leftrightarrow (t \in T^0)$. Поэтому уравнения (3) можно представить в двоичной логике в следующем виде:

$$\tau_t \equiv \bigwedge_{p \in t} \left(\bigwedge_{s \in p} \tau_s \wedge \bigwedge_{s \in p} \bar{\tau}_s \right) \vee \left(\bigwedge_{s \in p} \bar{\tau}_s \wedge \bigwedge_{s \in p} \tau_s \right) \wedge \bigwedge_{p \in t} \left(\bigwedge_{s \in p} \tau_s \wedge \bigwedge_{s \in p} \bar{\tau}_s \right) \quad (4)$$

Таким образом мы доказали следующую теорему.

Теорема 3. Разбиение произвольной сети Петри на функциональные подсети полностью определяется системой логических уравнений (4).

В процессе решения система (4) может быть заменена одним уравнением, представляющим собой конъюнкцию уравнений, соответствующих каждому из переходов сети. Методы решения логических уравнений достаточно хорошо изучены в [9].

Рассмотрим пример декомпозиции сети N_1 (Рис. 1). Постоим систему логических уравнений вида (4):

$$\begin{cases} \tau_1 \equiv (\tau_6 \tau_4 \tau_1 \vee \bar{\tau}_6 \bar{\tau}_4 \tau_1)(\tau_1 \tau_5 \tau_2 \vee \tau_1 \bar{\tau}_5 \bar{\tau}_2)(\tau_1 \tau_2 \tau_3 \vee \tau_1 \bar{\tau}_2 \bar{\tau}_3) \\ \tau_2 \equiv (\tau_1 \tau_5 \tau_2 \vee \bar{\tau}_1 \bar{\tau}_5 \bar{\tau}_2)(\tau_1 \tau_2 \tau_3 \vee \bar{\tau}_1 \bar{\tau}_2 \bar{\tau}_3)(\tau_5 \tau_2 \tau_6 \vee \tau_5 \tau_2 \bar{\tau}_6) \\ \tau_3 \equiv (\tau_1 \tau_2 \tau_3 \vee \bar{\tau}_1 \bar{\tau}_2 \bar{\tau}_3)(\tau_3 \tau_4 \vee \tau_3 \bar{\tau}_4) \\ \tau_4 \equiv (\tau_3 \tau_4 \vee \bar{\tau}_3 \bar{\tau}_4)(\tau_1 \tau_4 \tau_6 \vee \bar{\tau}_1 \bar{\tau}_4 \tau_6) \\ \tau_5 \equiv (\tau_1 \tau_5 \tau_2 \vee \bar{\tau}_1 \bar{\tau}_5 \bar{\tau}_2)(\tau_5 \tau_2 \tau_6 \vee \tau_5 \tau_2 \bar{\tau}_6) \\ \tau_6 \equiv (\tau_5 \tau_2 \tau_6 \vee \bar{\tau}_5 \bar{\tau}_2 \bar{\tau}_6)(\tau_1 \tau_4 \tau_6 \vee \bar{\tau}_1 \bar{\tau}_4 \tau_6) \end{cases}$$

Возьмём конъюнкцию уравнений системы, упростим полученное выражение и приведём к дизъюнктивной совершенной нормальной форме; получим

$$\bar{\tau}_1 \bar{\tau}_2 \bar{\tau}_3 \bar{\tau}_4 \bar{\tau}_5 \bar{\tau}_6 \vee \tau_1 \bar{\tau}_2 \bar{\tau}_3 \bar{\tau}_4 \bar{\tau}_5 \bar{\tau}_6 \vee \bar{\tau}_1 \bar{\tau}_2 \bar{\tau}_3 \tau_4 \bar{\tau}_5 \tau_6 \vee \bar{\tau}_1 \tau_2 \tau_3 \bar{\tau}_4 \tau_5 \bar{\tau}_6 \vee \tau_1 \bar{\tau}_2 \bar{\tau}_3 \tau_4 \bar{\tau}_5 \tau_6 \vee \tau_1 \tau_2 \tau_3 \bar{\tau}_4 \tau_5 \tau_6 \vee \tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4 \tau_5 \tau_6$$

Заметим, что первый из термов соответствует пустой подсети, следующие три терма соответствуют минимальным подсетям, изображённым на Рис. 2, оставшиеся термы описывают суммы минимальных подсетей; так, например, шестой терм описывает подсеть, изображённую на Рис. 3.

Следует отметить, что алгоритмическая сложность декомпозиции произвольной сети Петри на функциональные подсети с помощью описанных логических уравнений является в общем случае асимптотически экспоненциальной, что связано с оценками сложности решения логических уравнений [9]. Поэтому необходимо построение специальных эффективных алгоритмов декомпозиции сети.

Алгоритм декомпозиции сети Петри

Подсеть $Z = B(R) = (X, Q, Y, R)$ сети Петри N будем называть *полной* в N , если в N выполняется $X^\bullet \subseteq R$, ${}^\bullet Y \subseteq R$, ${}^\bullet Q^\bullet \subseteq R$.

Алгоритм 1:

Шаг 0. Выберем произвольный переход $t \in T$ сети N и включим его во множество избранных переходов $R := \{t\}$.

Шаг 1. Построим подсеть Z , порождённую множеством R :
 $Z = B(R) = (X, Q, Y, R)$.

Шаг 2. Если Z полная в N , то Z искомая подсеть.

Шаг 3. Формируем множество поглощаемых переходов:

$$S = \{t \mid t \in X^\bullet \wedge t \notin R \vee t \in {}^\bullet Y \wedge t \notin R \vee t \in {}^\bullet Q^\bullet \wedge t \notin R\}.$$

Шаг 4. Полагаем $R := R \cup S$ и переходим на шаг 1.

Теорема 4. Подсеть Z полна в сети Петри N тогда и только тогда, когда она является функциональной подсетью N .

Доказательство. Начнём с доказательства необходимости полноты. Итак, пусть Z является функциональной подсетью N : $Z \succ N$. Тогда условия полноты выполняются для смежных переходов позиций Q в силу определения внутренних позиций, а для выходных переходов входных позиций и входных переходов выходных позиций в силу ограничений на дуги в определении функциональной подсети.

Докажем достаточность. Известно, что Z является подсетью N , порождённой множеством переходов R , и Z является функциональной сетью. Остаётся доказать, что выполняются ограничения на дуги, связывающие позиции подсети Z с оставшейся частью сети. Обозначим оставшуюся часть сети $Z' = N - B(R) = (Y, Q', X, R')$, где $Q' = P \setminus (X \cup Q \cup Y)$, $R' = T \setminus R$. Предположим противное. Пусть N содержит одну либо несколько запрещённых дуг одного из возможных шести типов: а) (x, r') ; б) (r', y) ; в) (r, q') ; г) (q', r) ; д) (q, r') ; е) (r', q) , где $x \in X, y \in Y, q \in Q, q' \in Q', r \in R, r' \in R'$. Рассмотрим каждый из выделенных типов дуг в отдельности:

А) Если $(x, r') \in F$, то $r' \in x^\bullet$, следовательно $X^\bullet \not\subseteq R$.

Б) Если $(r', y) \in F$, то $r' \in {}^\bullet y$, следовательно ${}^\bullet Y \not\subseteq R$.

В) Если $(r, q') \in F$, то $q' \in Y$.

Г) Если $(q', r) \in F$, то $q' \in X$.

Д) Если $(q, r') \in F$, то $r' \in q^\bullet$, следовательно ${}^\bullet Q^\bullet \not\subseteq R$.

Е) Если $(r', q) \in F$, то $r' \in {}^\bullet q$, следовательно ${}^\bullet Q^\bullet \not\subseteq R$.

Таким образом, в каждом из перечисленных случаев приходим к противоречию, что и доказывает достаточность полноты подсети. ■

Теорема 5. Подсеть Z построенная алгоритмом 1 является минимальной функциональной подсетью сети Петри N .

Доказательство. Предположим противное: пусть Z не минимальна. Тогда существует минимальная функциональная подсеть Z' сети Петри N такая что

$Z' = B(T'')$ и $T'' \subset T'$. То есть Z содержит Z' . Рассмотрим два возможных варианта исполнения алгоритма 1: а) при запуске с перехода $t \in T'$, такого что $t \in T''$; б) при запуске с перехода $t \in T', t \in T''$, такого что $t \notin T''$. Рассмотрим отдельно каждый из двух указанных случаев.

А) Пусть $t \in T''$. Рассмотрим первый из переходов v множества $T' \setminus T''$, попадающий во множество S на некотором проходе основного цикла алгоритма 1. При этом в соответствии с описанием шага 3 возможен один из трёх вариантов: $v \in X \bullet$ либо $v \in \bullet Y$, либо $v \in \bullet S \bullet$. В первом варианте позиция $x \in X$ такая что $v \in x \bullet$ не может быть ни входной, ни выходной, ни внутренней позицией сети Z' . Получаем противоречие. Аналогичным образом приходим к противоречию для второго и третьего вариантов.

Б) Пусть $t \notin T''$. Рассмотрим первый из переходов v множества T'' , попадающий во множество S на некотором проходе основного цикла алгоритма 1. При этом в соответствии с описанием шага 3 возможен один из трёх вариантов: $v \in X \bullet$ либо $v \in \bullet Y$, либо $v \in \bullet S \bullet$. В первом варианте позиция $x \in X$ такая что $v \in x \bullet$ не может быть ни входной, ни выходной, ни внутренней позицией сети Z' . Получаем противоречие. Аналогичным образом приходим к противоречию для второго и третьего вариантов. ■

Итак, алгоритм 1 позволяет построить минимальную функциональную подсеть Z сети Петри N . Положим $i := 1$ и $Z^i := Z$. Затем определим $N := N - Z$ и повторим выполнение алгоритма 1 в том случае, если множество T не пусто. Продолжая таким образом и выбирая $i := i + 1$ мы построим множество минимальных функциональных подсетей Z^1, Z^2, \dots, Z^k сети N представляющих собою искомое разбиение исходной сети.

Выполнение алгоритма для сети, изображённой на Рис. 1, даёт результат, совпадающий с полученным в предыдущем разделе и представленным на Рис. 2.

Выполним оценку сложности алгоритма, предположив, что сеть содержит n вершин. На каждом из проходов алгоритма множество R содержит не более n переходов и для каждого перехода на шаге 1 перечисляется не более n позиций. Таким образом, сложность шага 1 $O(n^2)$. Аналогичны оценки для шагов 2, 3, 4. А так как основной цикл алгоритма выполняется не более n раз, то приведенные выше рассуждения доказывают следующую теорему.

Теорема 6. Алгоритм 1 имеет полиномиальную сложность не превышающую $O(n^3)$, где n – количество вершин сети.

Заметим, что так как алгоритм обрабатывает каждый из переходов сети однократно, то наивысшая степень полинома в оценке сложности определяется в общем случае количеством дуг, соединяющих вершины сети. А их верхняя граница в оценке выбрана как n^2 . Практическое исследование десятков реальных сетевых моделей с помощью программной реализации алгоритма 1 показало, что сетевые модели имеют невысокую плотность дуг, зачастую не превышающую некоторой константы c для каждой из вершин сети. В этом случае сложность алгоритма линейна.

Заключение

Таким образом, в настоящей работе исследованы свойства множества функциональных подсетей произвольной заданной сети Петри. Построены и обоснованы два различных алгоритма для построения порождающего семейства функциональных подсетей. Показано, что сложность основного алгоритма является полиномиальной, а именно $O(n^3)$, где n – количество вершин сети, а для сетей с невысокой фиксированной плотностью дуг – линейной.

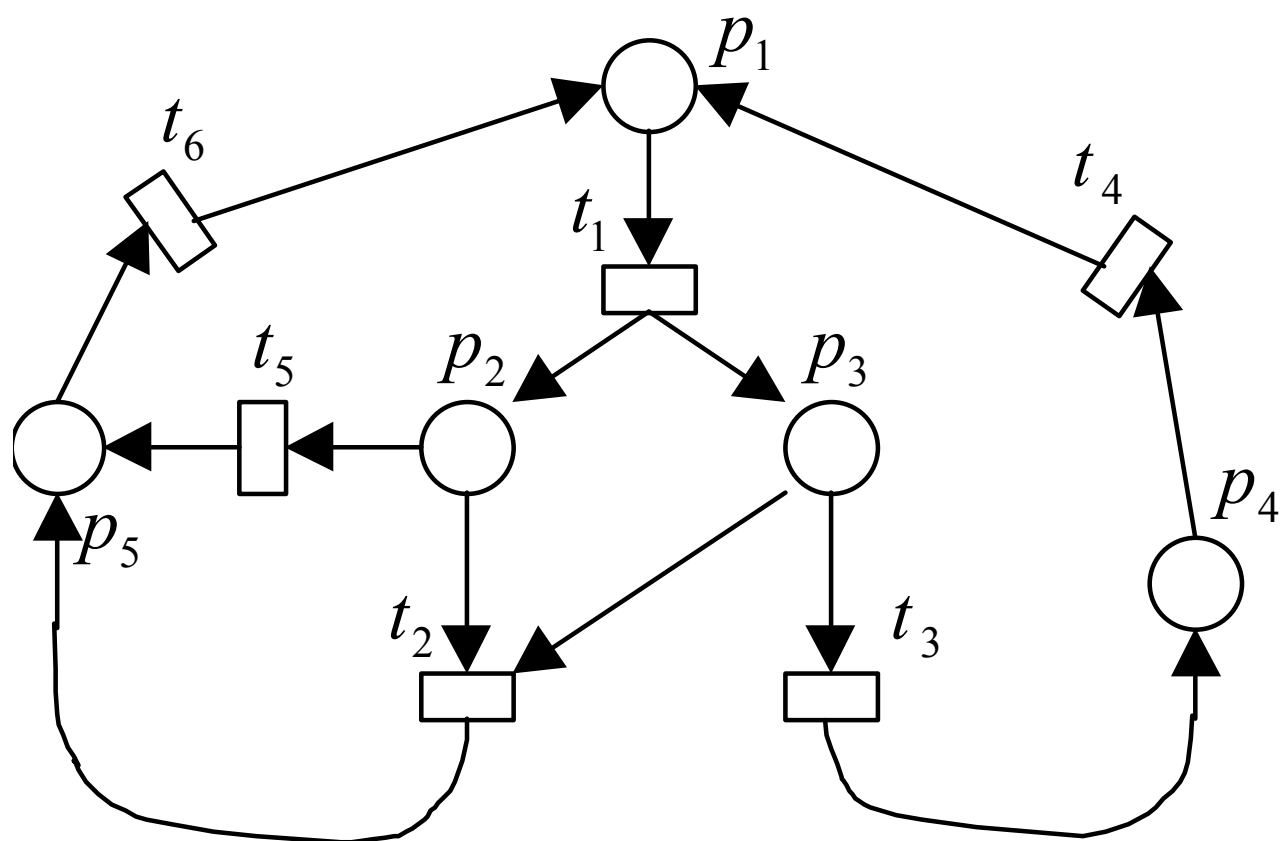
Программная реализация алгоритма применена для декомпозиции ряда моделей реальных систем и процессов, представленных в различных источниках. Как правило сети дают хороший показатель степени декомпозиции, что позволяет разбить их на подсети размерностью в несколько десятков вершин.

В совокупности с [6], где получено формальное описание передаточной функции сети с входными и выходными позициями, настоящая работа даёт замкнутую технологическую цепочку для анализа свойств сети, основанную на выделении функциональных подсетей, формальном представлении их передаточных функций и последующих эквивалентных преобразованиях. В отличие от [3] такая редукция сети сохраняет все её свойства, а не только заданное их множество.

Так как в настоящей работе не использовано понятие динамики сети, то полученные результаты справедливы для произвольного двудольного ориентированного графа [8].

Список литературы

1. Питерсон Дж. Теория сетей Петри и моделирование систем.- М. Мир, 1984.- 264 с.
2. Котов В.Е. Сети Петри.- М. Наука, 1984.- 160 с.
3. Бандман М.К., Бандман О.Л., Есикова Т.Н. Территориально-производственные комплексы: Прогнозирование процесса формирования с использованием сетей Петри.- Новосибирск. Наука, 1990.- 303с.
4. Слепцов А.И., Юрасов А.А. Автоматизация проектирования управляющих систем гибких автоматизированных производств / Под ред. Б.Н.Малиновского.- К. Техніка, 1986.- 160 с.
5. Зайцев Д.А., Слепцов А.И. Визуализация производственных процессов в инструментальной системе диспетчера машиностроительного предприятия // Автометрия.- 1990, №4, с. 90-93.
6. Зайцев Д.А., Слепцов А.И. Эквивалентные преобразования временных сетей Петри // Кибернетика и системный анализ.- 1997, №5, с. 59-76.
7. Ichikawa A., Yokoyama K., Kurogi S. Reachability and control of discrete event systems represented by conflict-free Petri nets. Proc. of ISCAS 85, pp. 487-490.
8. Харари Ф. Теория графов.- М.: Мир, 1973.- 300с.
9. Глушков В.М. Синтез цифровых автоматов.- М.: Физматгиз, 1962.- 476с.

Рис. 1. Сеть Петри N_1 .

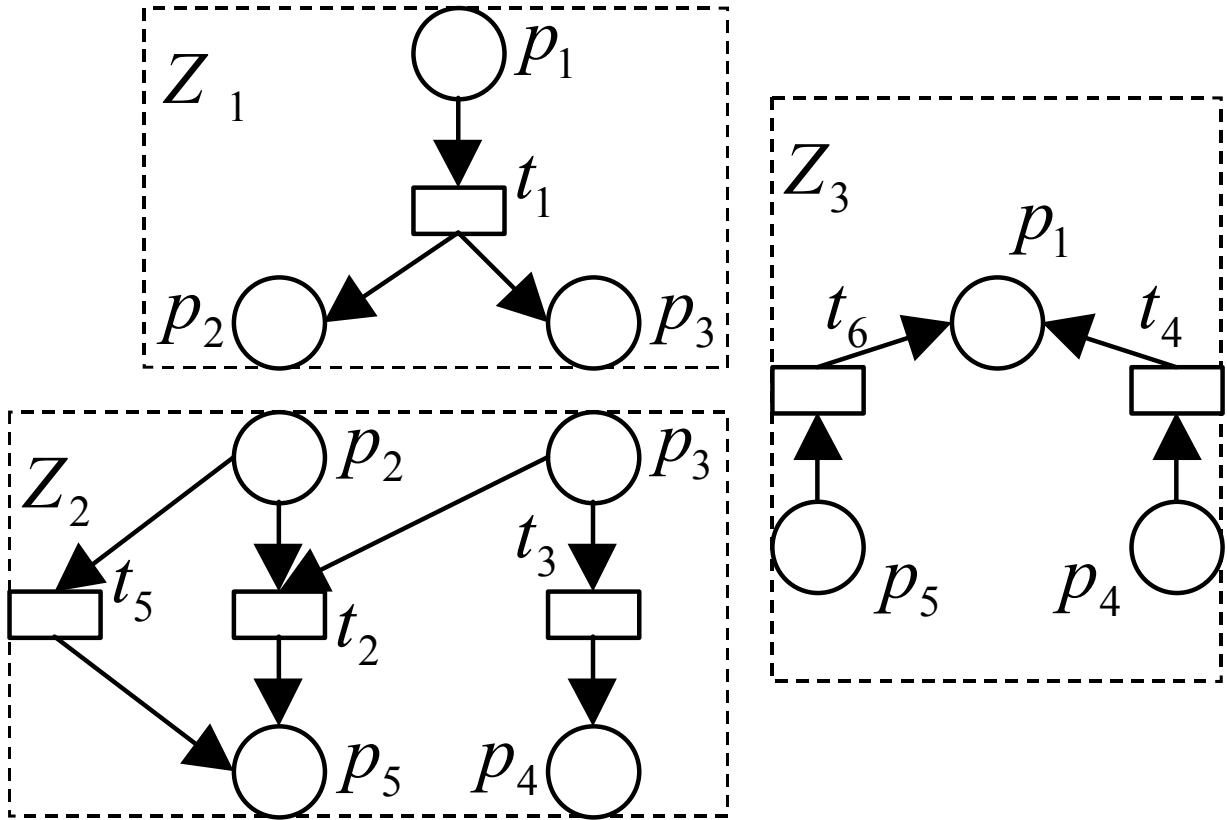


Рис. 2. Деконпозиция сети Петри N_1 на функциональные подсети.

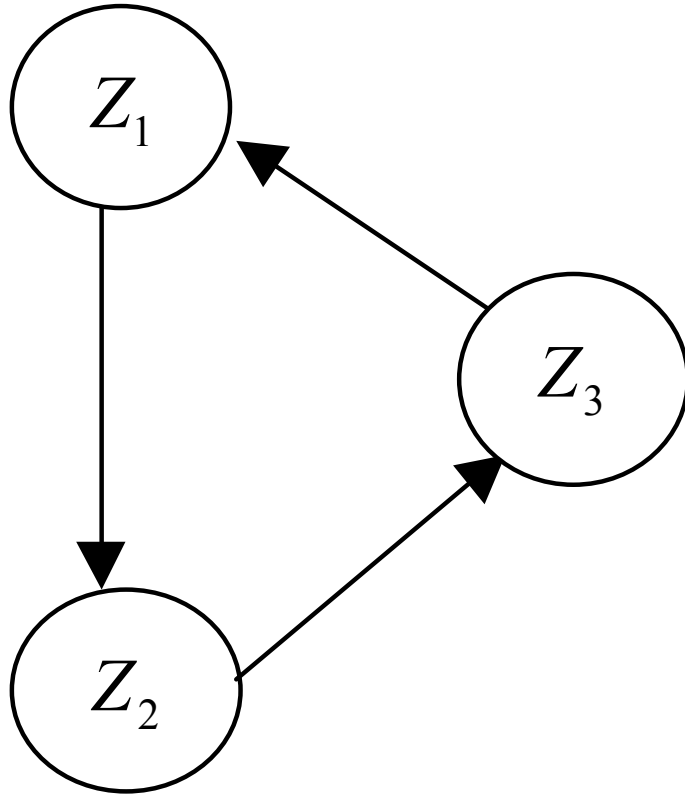


Рис. 4. Граф функциональных подсетей G_1 сети Петри N_1 .

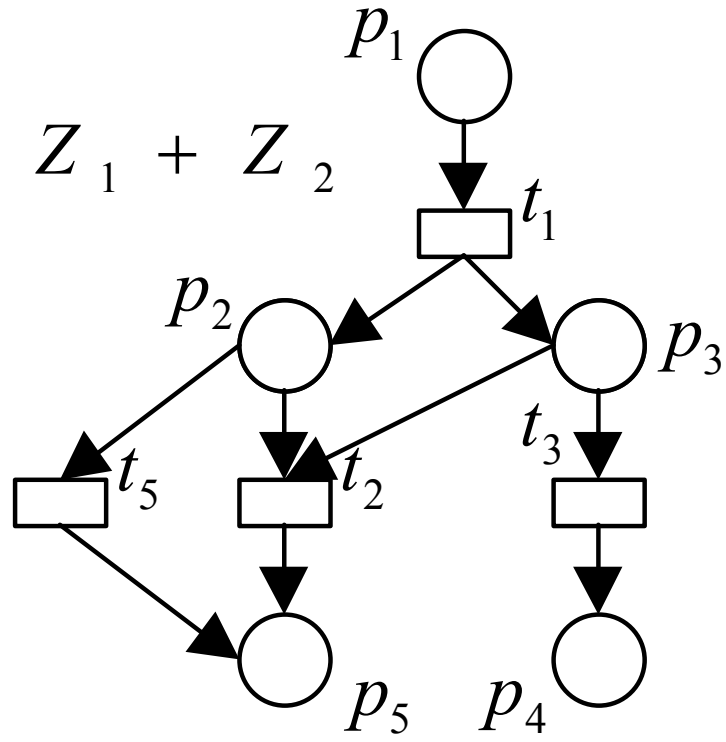


Рис. 3. Функциональная подсеть $Z_1 + Z_2$ сети Петри N_1 .

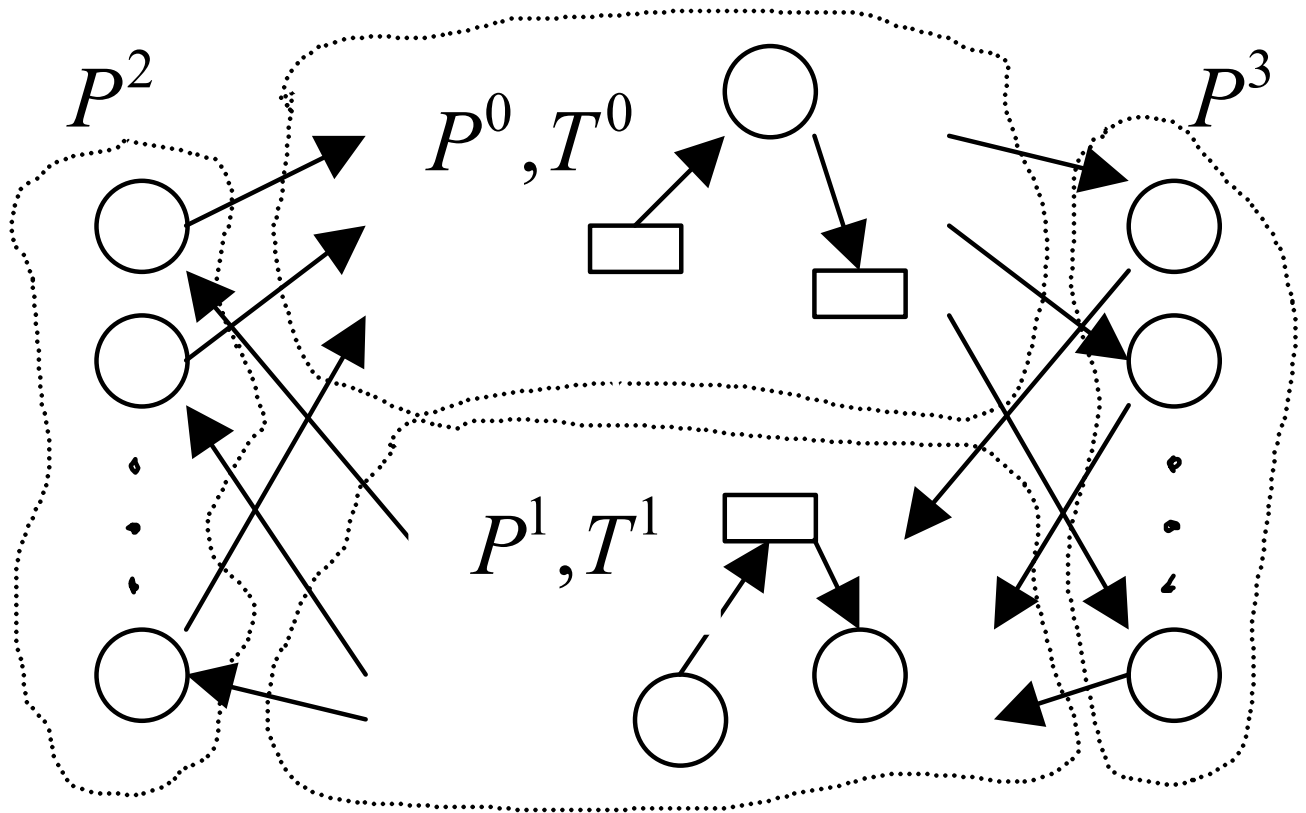


Рис. 6. Взаимосвязь функциональных подсетей.

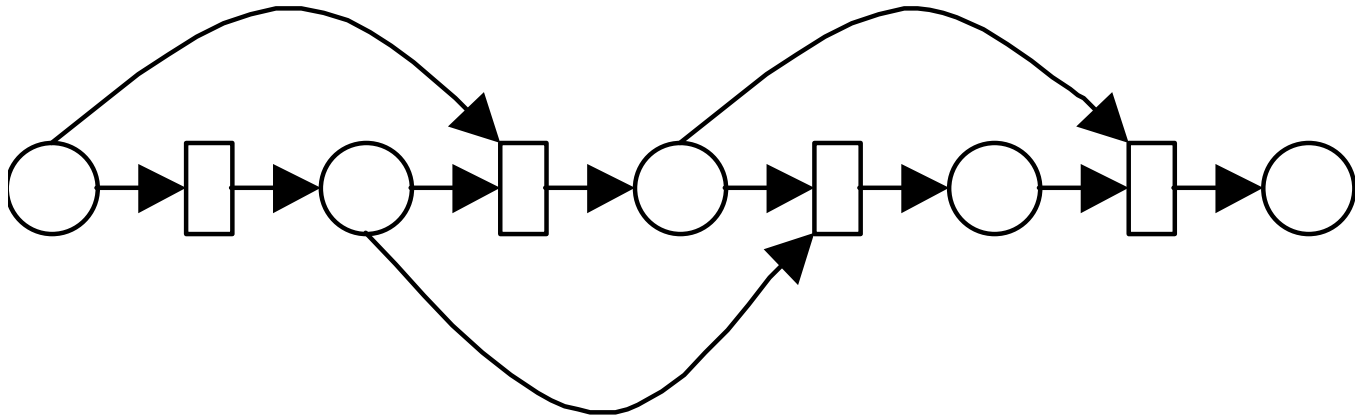


Рис. 5. Неразложимая сеть N_2 .

Published: Cybernetics and Systems Analysis, no. 5, 2004, p. 131-140.